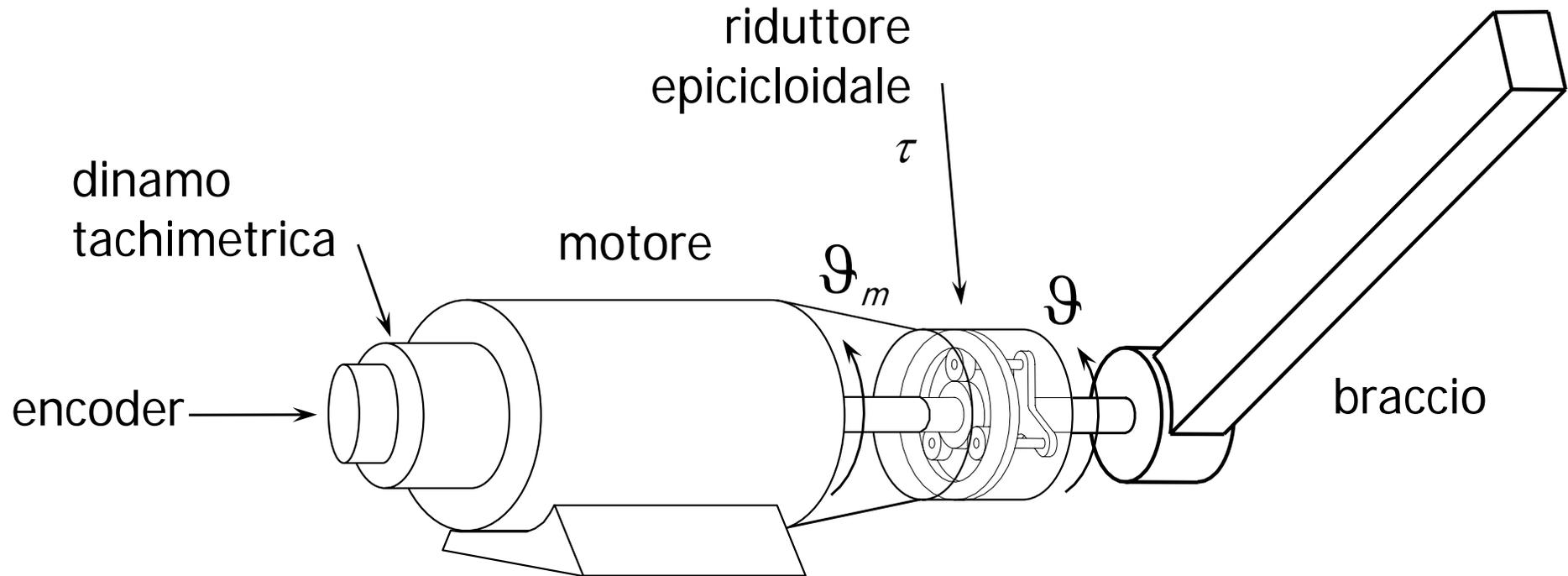
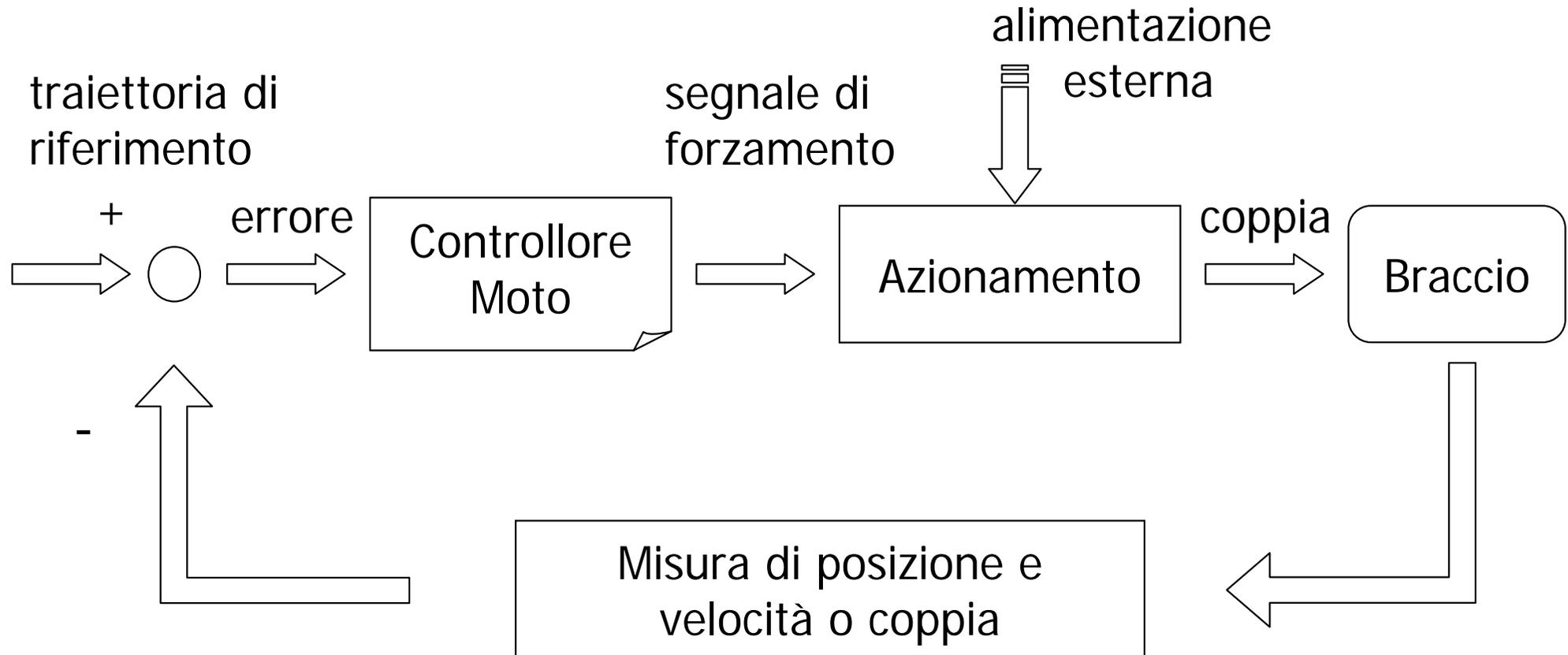


CONTROLLO DEI ROBOT

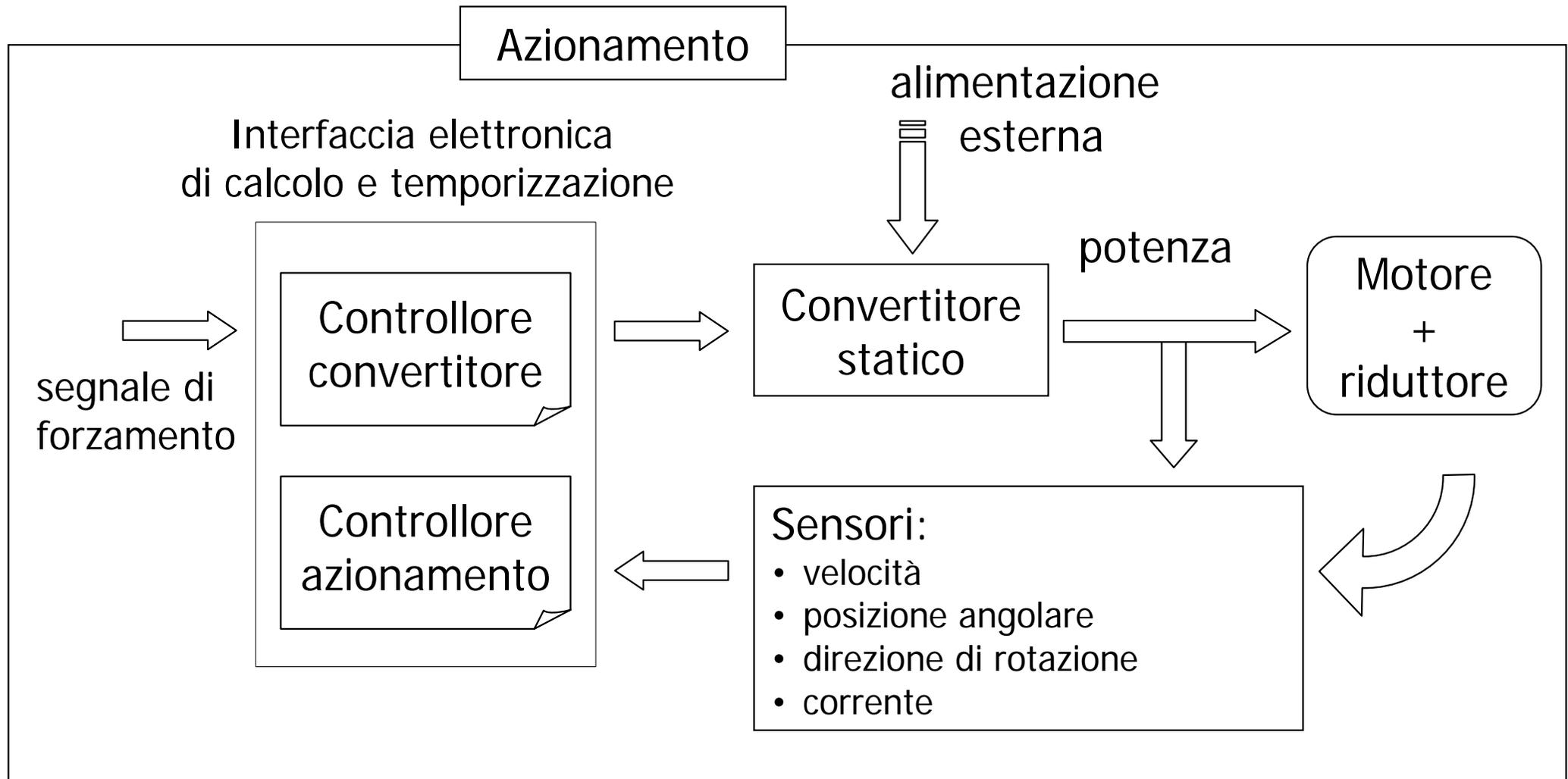
Robot con un Grado di Mobilità



- Consideriamo un motore elettrico \rightarrow DC, brushless o Asincrono
- Come trasduttori di posizione angolare analogici, in alternativa all'encoder, si usano il resolver o sensori ad effetto Hall
- I riduttori più usati sono gli epicicloidali o l'Harmonic Drive



- Il controllo di alto livello agisce sulla traiettoria che il robot esegue o sull'interazione con l'ambiente esterno
- Agisce sulle variabili di controllo \mathcal{G} e $\dot{\mathcal{G}}$ o C_m



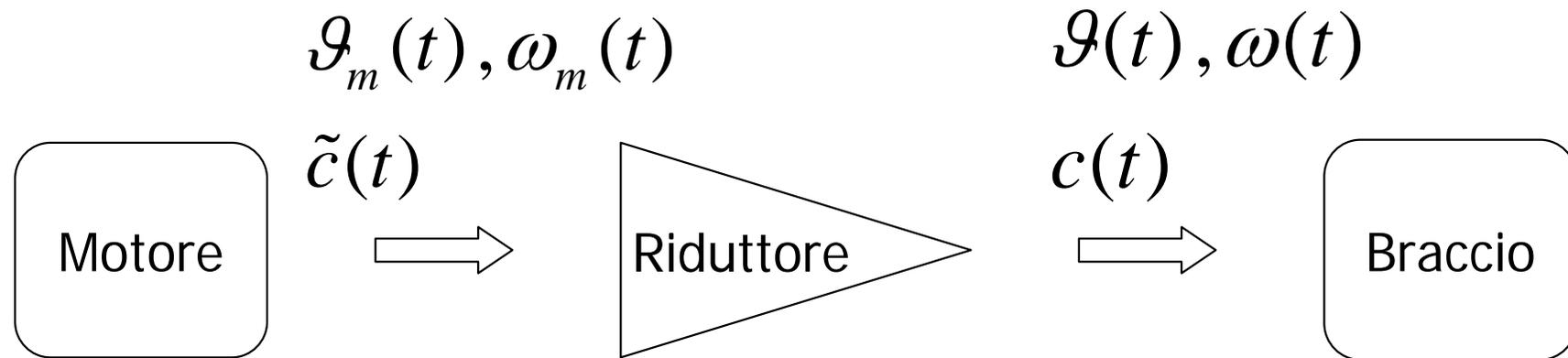
- Il controllo di basso livello gestisce le dinamiche non esplicitamente considerate ad alto livello

- Convertitore Statico ➔ stadio di potenza ➔ raddrizzatori per conversioni AC/DC, inverter per conversioni DC/AC, Ponte H
- Interfaccia elettronica di calcolo e temporizzazione:
 - PIC (Peripheral Interface Controller) ➔ famiglia di circuiti integrati a semiconduttore con funzioni di microcontrollore.
 - DSP (Digital Signal Processor) ➔ microprocessore ottimizzato per eseguire, in maniera estremamente efficiente, sequenze di istruzioni molto ricorrenti nel condizionamento di segnali digitalizzati
 - PLC (Programmable Logic Controller) ➔ Computer industriale componibile progettato per condizioni gravose di funzionamento, come ampi intervalli di temperatura, schermato per rumore elettrico, e resistenza a vibrazioni e urti.

Controllore convertitore ➔ invia segnali *PWM* per attivare o interdire i transistor di cui è costituito il Convertitore statico

Controllore Azionamento ➔ controllo locale realizzato ad esempio con una funzione di trasferimento Proporzionale Integrata (PI)

Braccio azionato con Motore DC



$$\omega(t) = \tau \omega_m(t)$$

$$\tilde{c}(t) = \tau c(t)$$

in assenza di gravità
e altri disturbi

$$\begin{cases} C_m(s) = \frac{k^2}{(R + sL)} \left(\frac{V_a(s)}{k} - \Omega_m(s) \right) \\ C_m(s) = (J_m s + b_m) \Omega_m(s) + \tilde{C}(s) \end{cases}$$

$$c(t) = J_l \ddot{\mathcal{G}}(t) + b_l \dot{\mathcal{G}}(t)$$

con

$J_l \rightarrow$ momento d'inerzia del braccio

$b_l \rightarrow$ coefficiente d'attrito viscoso

- la relazione fra le coppie scambiate:

$$\tilde{c} = \tau c = \tau \left(J_l \ddot{\vartheta}(t) + b_l \dot{\vartheta}(t) \right) = \tau^2 \left(J_l \ddot{\vartheta}_m(t) + b_l \dot{\vartheta}_m(t) \right)$$



$$c_m(t) = J_m \ddot{\vartheta}_m(t) + b_m \dot{\vartheta}_m(t) + \tau^2 \left(J_l \ddot{\vartheta}_m(t) + b_l \dot{\vartheta}_m(t) \right)$$

- trasformando secondo Laplace:

$$C_m(s) = \left[s \left(J_m + \tau^2 J_l \right) + \left(b_m + \tau^2 b_l \right) \right] \Omega_m(s)$$

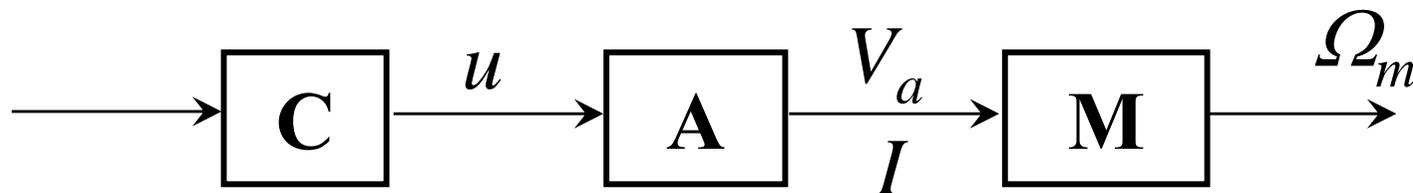
$$C_m(s) = \left(sJ_e + b_e \right) \Omega_m(s) \quad \text{con} \quad \begin{aligned} J_e &= J_m + \tau^2 J_l \\ b_e &= b_m + \tau^2 b_l \end{aligned}$$

- I motori in corrente continua e brushless possono essere comandati in tensione o in corrente cioè

l'amplificatore **A** fornisce al motore **M** una

tensione corrente

proporzionale a un segnale u , in genere una tensione,
fornita dal controllore **C**



- esistono amplificatori che funzionano in entrambe le modalità attivando una retroazione di corrente interna. L'abilitazione della retroazione consente il comando in corrente

Funzione di trasferimento Ω_m/V_a

- usando i modelli del motore DC + riduttore + braccio si ottiene

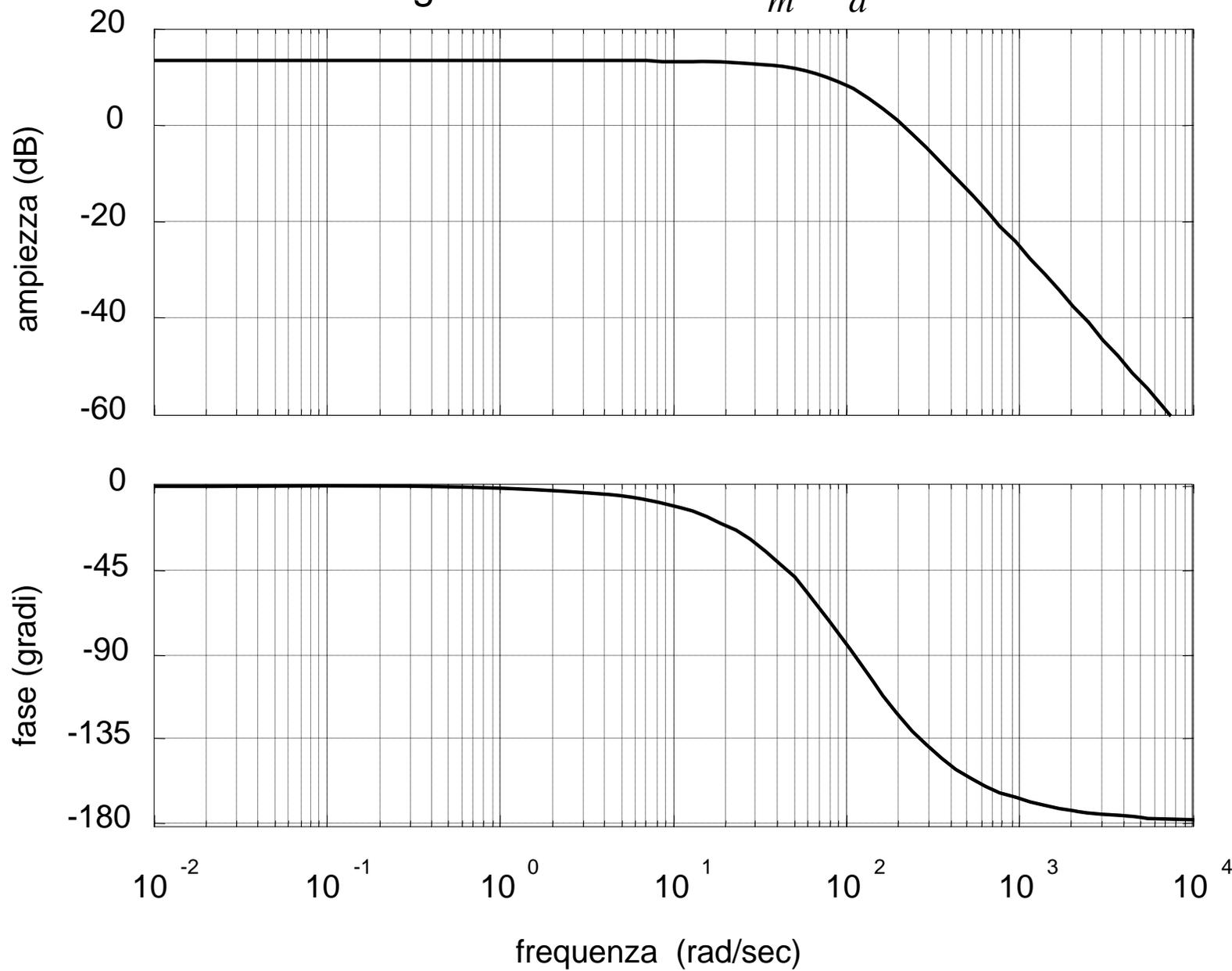
$$\frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{k}{(Ls + R)(J_e s + b_e) + k^2}$$

- equivalentemente per la velocità del braccio

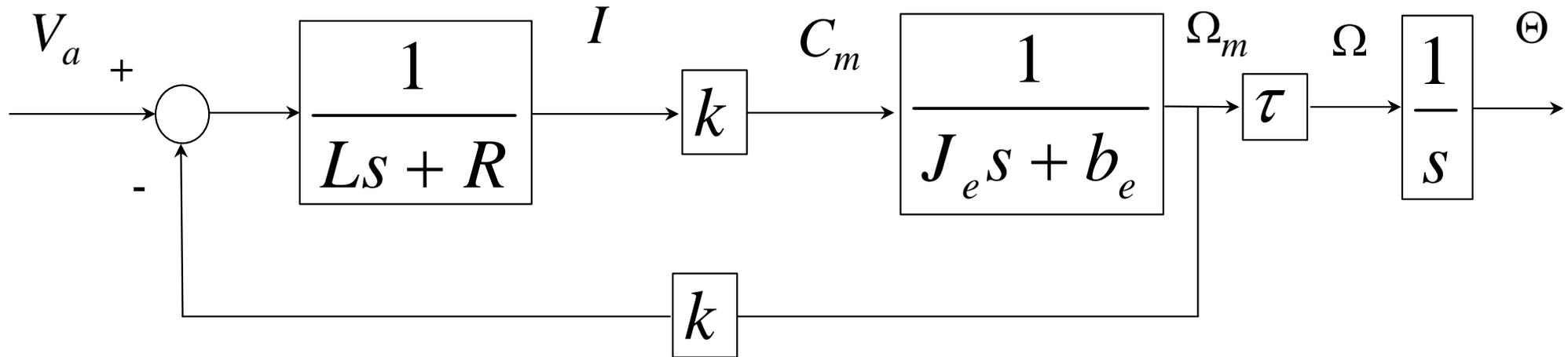
$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{\tau k}{(Ls + R)(J_e s + b_e) + k^2}$$



Diagramma di Bode Ω_m/V_a



- schema a blocchi



- due costanti di tempo

□ costante elettrica $\rightarrow t_e = L/R$

□ costante meccanica $\rightarrow t_m = J_e/b_e$

- La presenza di riduttori ci consente di considerare un modello equivalente, interpretando la coppia resistente dovuta al braccio come un disturbo

$$C_m(t) = J_m \ddot{\vartheta}_m(t) + b_m \dot{\vartheta}_m(t) + \tau^2 \left(J_l \ddot{\vartheta}_m(t) + b_l \dot{\vartheta}_m(t) \right)$$

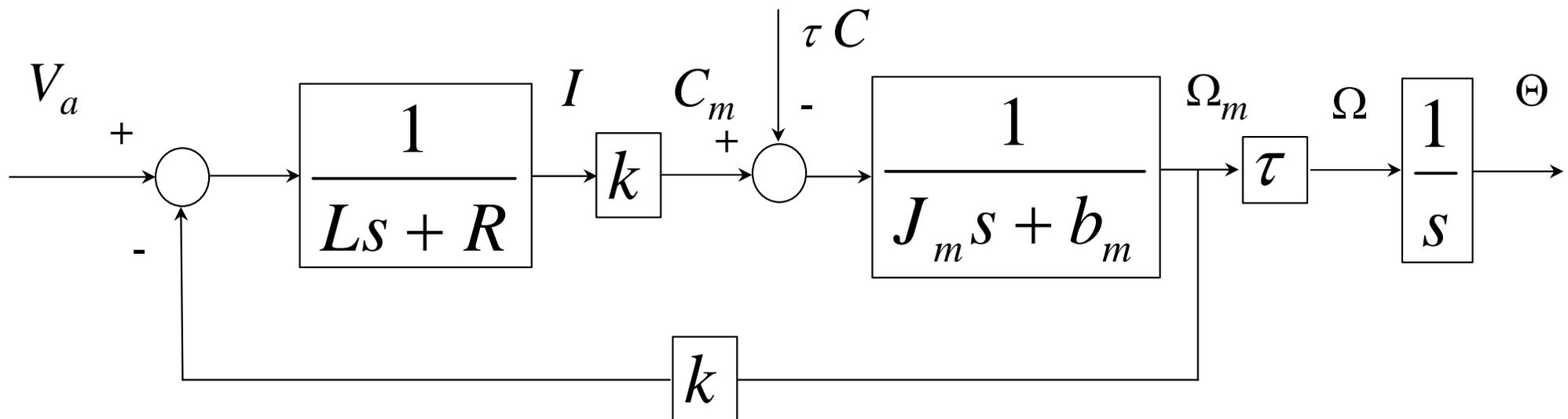
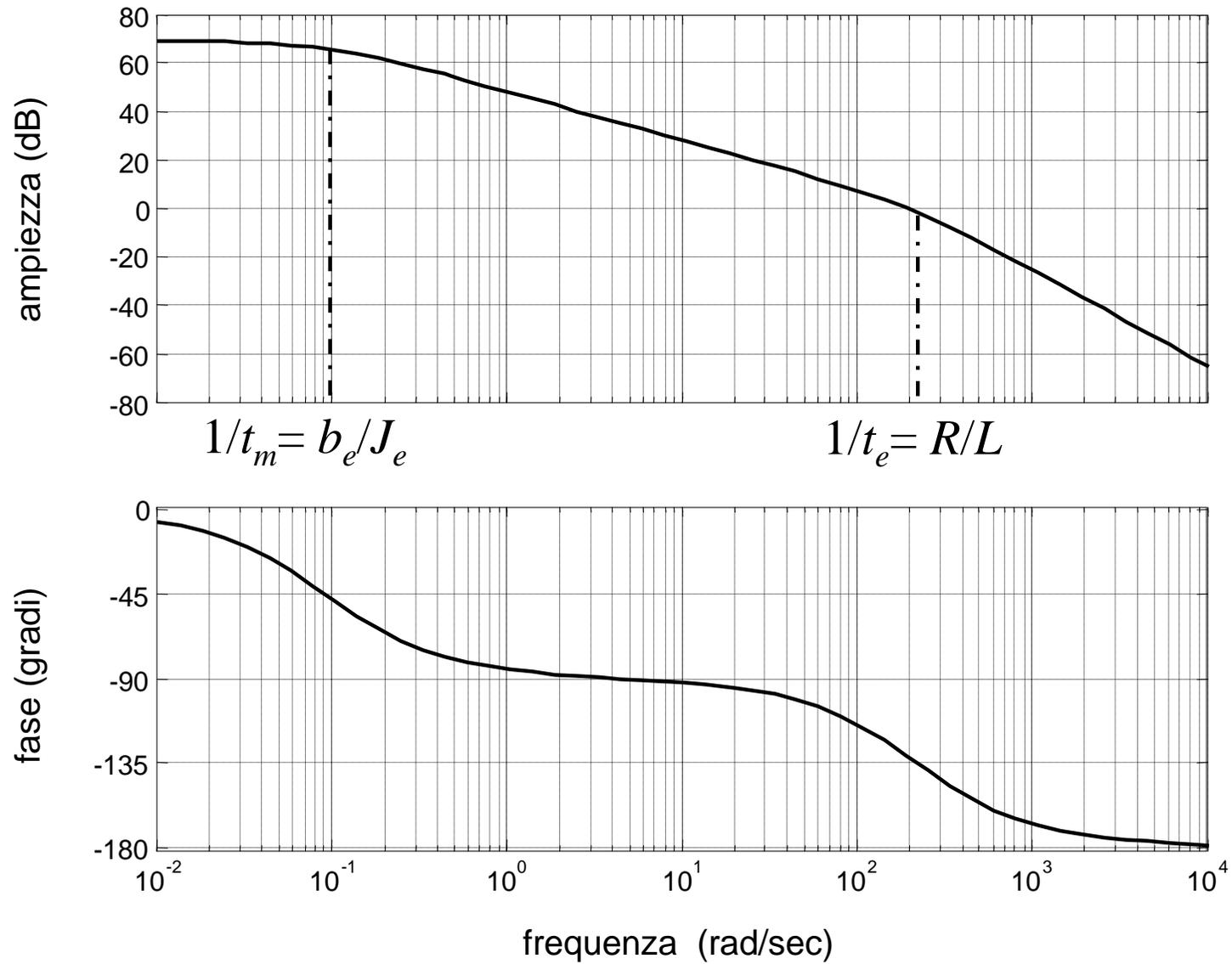
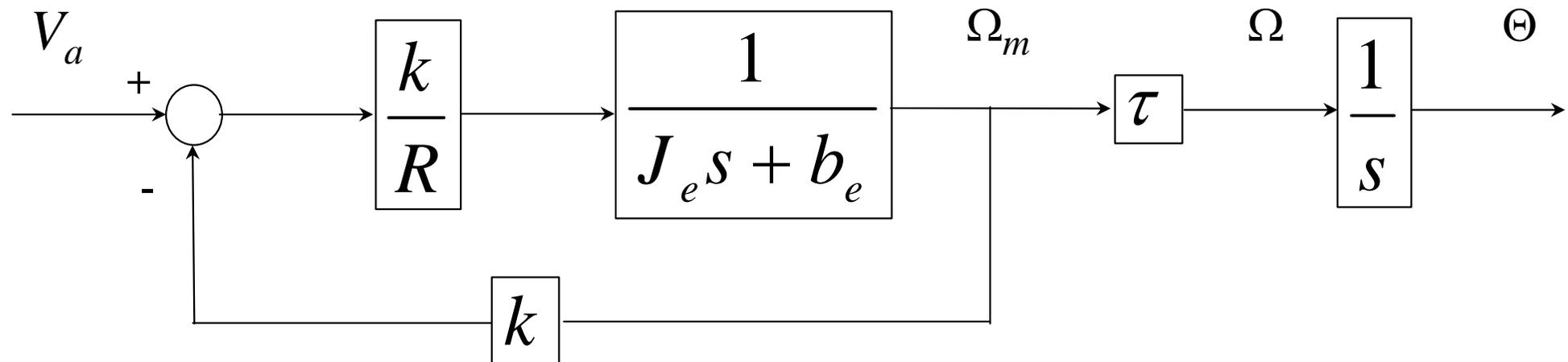


Diagramma di Bode ramo diretto Ω_m/V_a

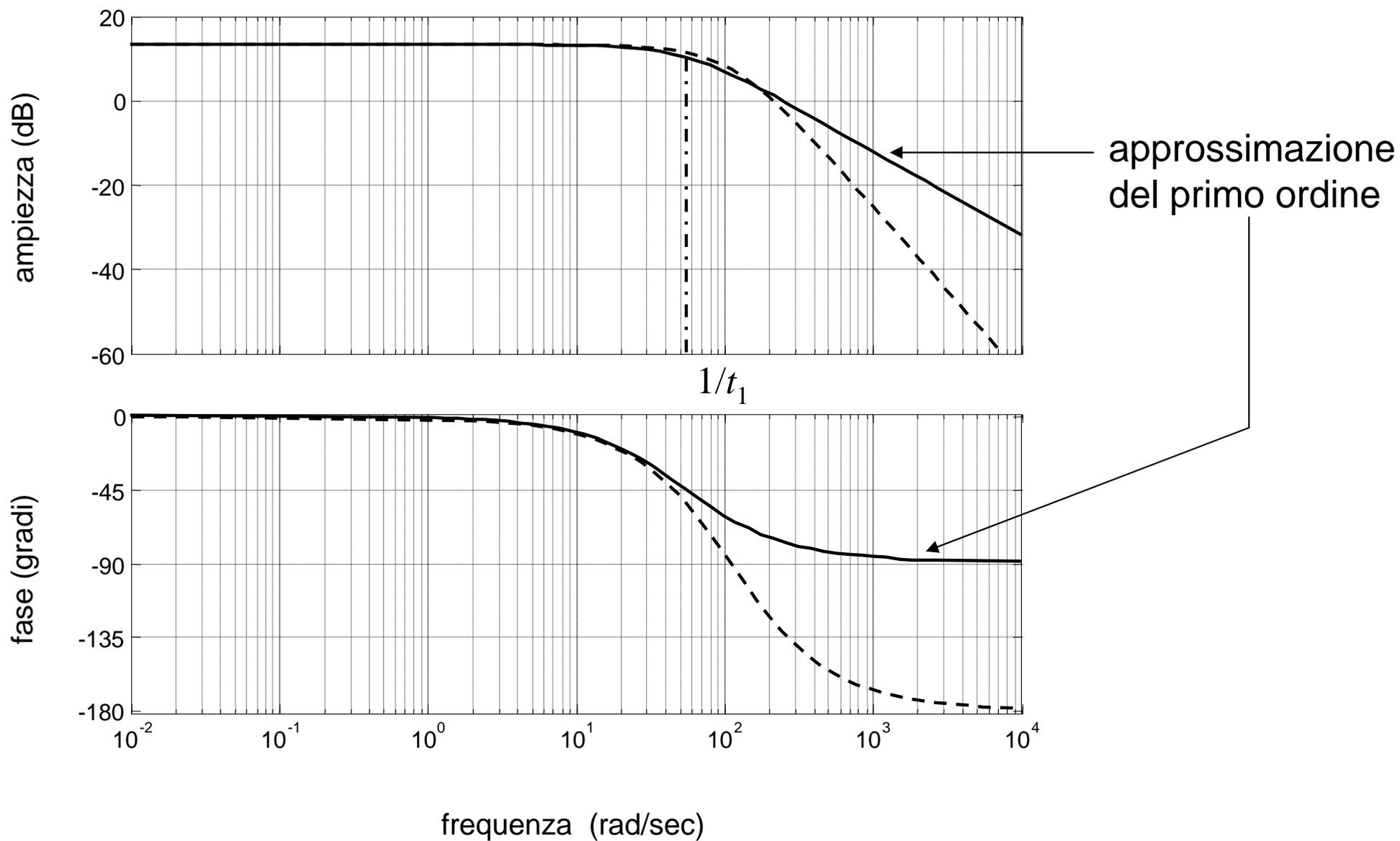


Funzione di trasferimento Ω_m/V_a : Approssimazione del Primo Ordine

- nelle applicazioni spesso $L/R \ll J_e/b_e$



$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} \approx \frac{k \tau}{J_e R s + (b_e R + k^2)}$$

Diagramma di Bode Ω_m/V_a 

- ricordando la caratteristica elettromeccanica e la dinamica di motore + riduttore e braccio

$$C_m = k I = \left[s \left(J_m + \tau^2 J_l \right) + \left(b_m + \tau^2 b_l \right) \right] \Omega_m(s)$$

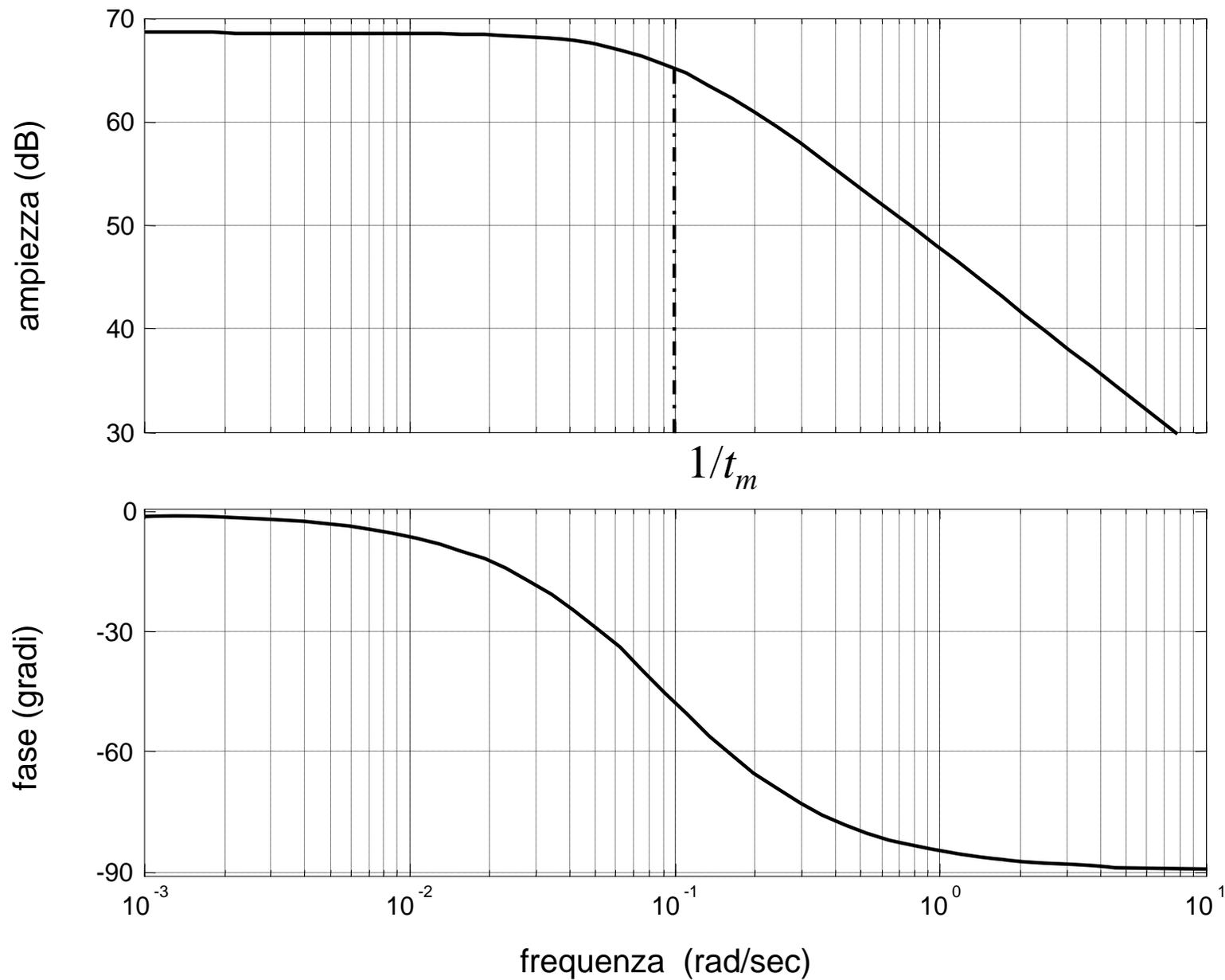
$$\frac{\Omega_m(s)}{I(s)} = \frac{k}{J_e s + b_e}$$

$$J_e = J_m + \tau^2 J_l$$

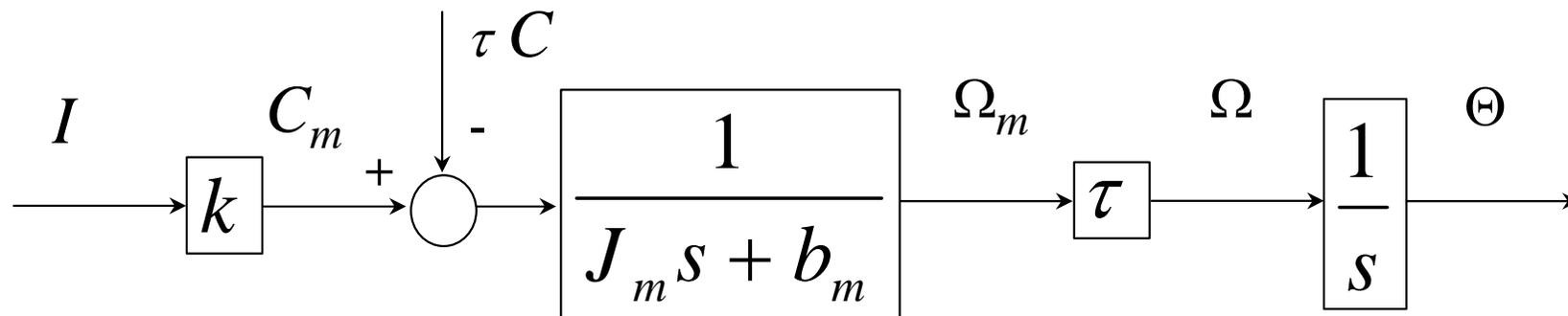
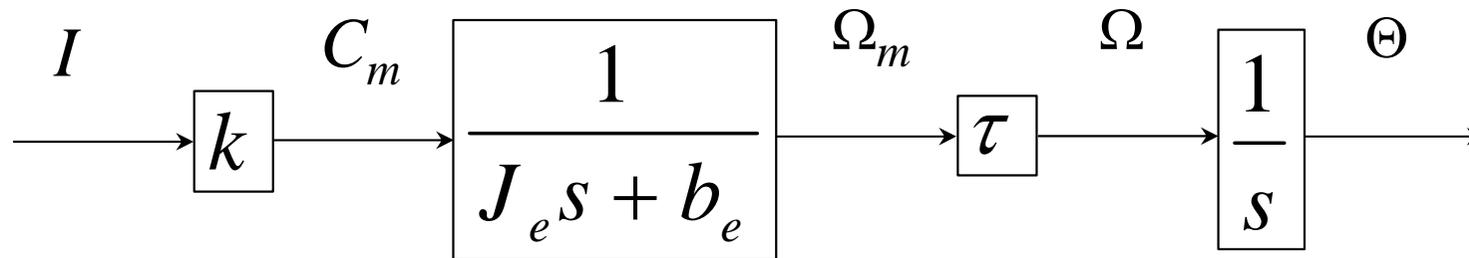
$$b_e = b_m + \tau^2 b_l$$



Diagramma di Bode Ω_m/I



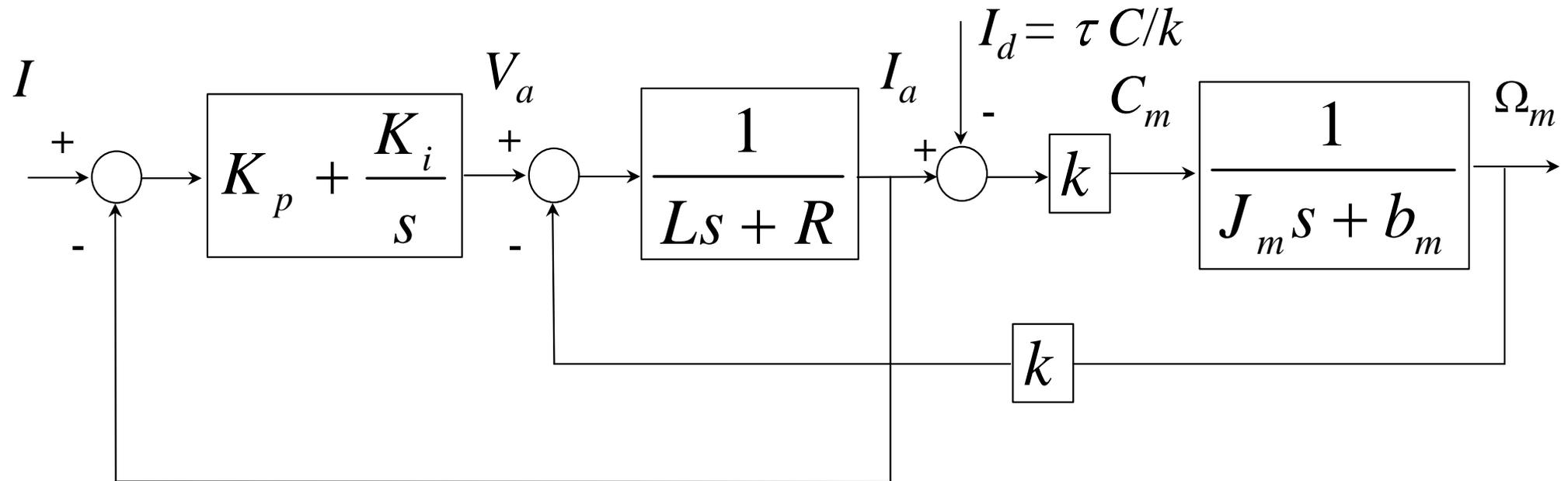
- schema a blocchi



- una costante di tempo

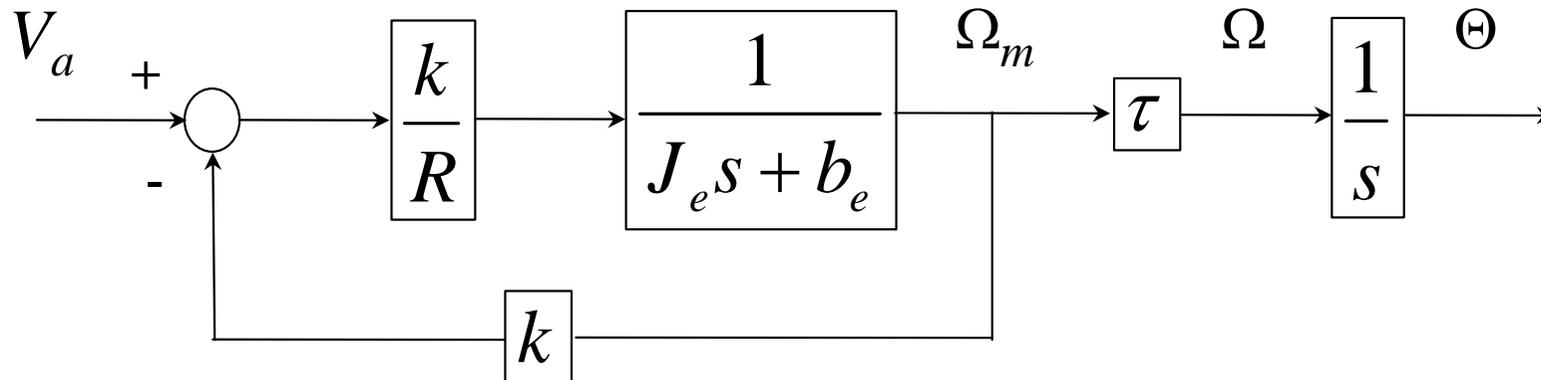
□ costante meccanica $\rightarrow t_m = J_e/b_e$

- schema a blocchi con un controllore di tipo PI

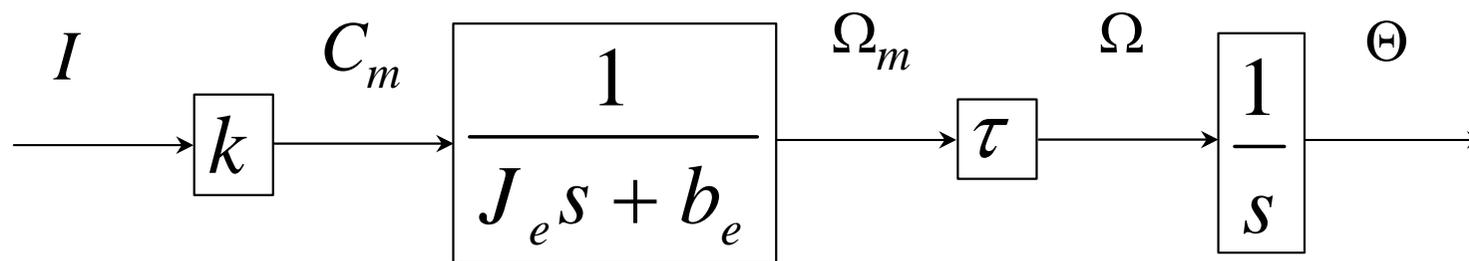


- si vuole evitare che la corrente di armatura I_a assuma, anche in transitorio, valori non compatibili con l'integrità del motore
- si ottiene il controllo diretto della coppia motrice con un riferimento di corrente I

- il comando in tensione implica un controllo sulla velocità Ω_m



- il comando in corrente implica un controllo sulla coppia C_m



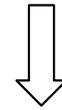
è utilizzato all'interno di un controllo di posizione e di velocità retroazionato

Funzione di Trasferimento Ω_m / Ω_s

Braccio azionato con Motore Asincrono

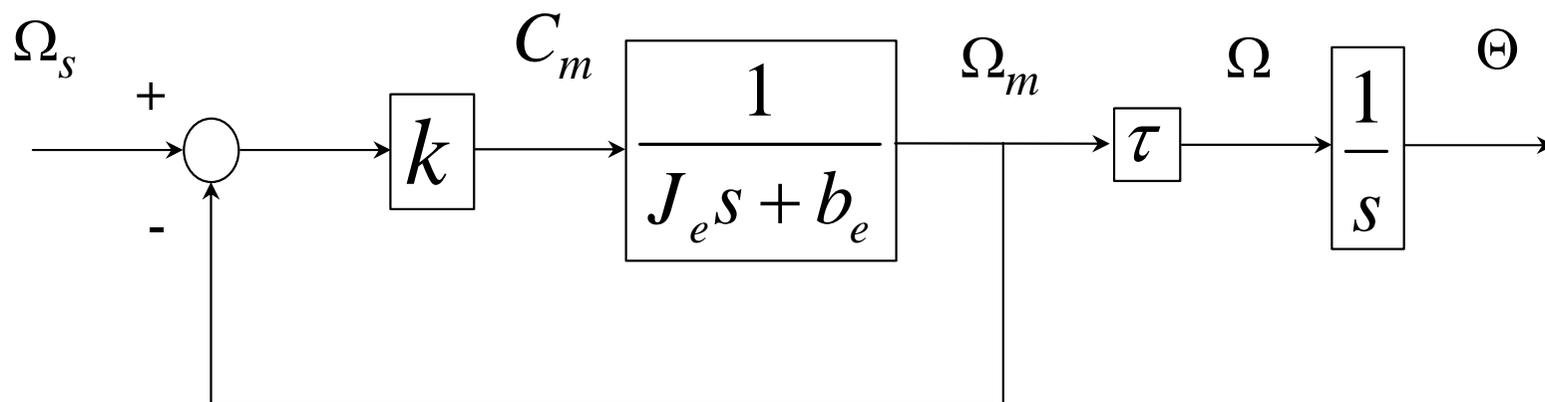
$$C_m(s) = k (\Omega_s(s) - \Omega_m(s)) \quad J_e = J_m + \tau^2 J_l$$

$$C_m(s) = (s J_e + b_e) \Omega_m(s) \quad \text{con} \quad b_e = b_m + \tau^2 b_l$$



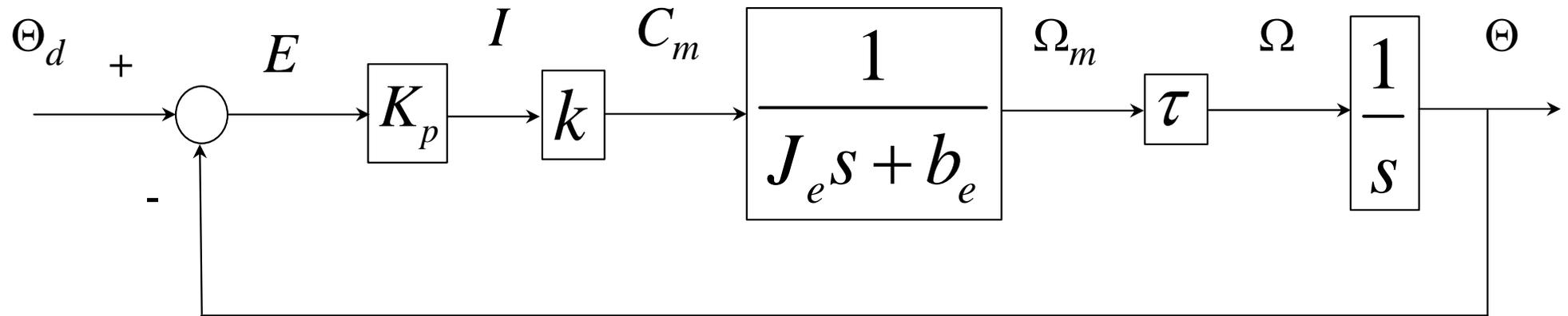
$$\Omega_m(s) = \frac{k}{s J_e + (b_e + k)} \Omega_s(s)$$

- schema a blocchi



- funzionamento equivalente a quello di un motore DC a regime

RETROAZIONE DI POSIZIONE



$$i(t) = K_p (\vartheta_d - \vartheta) = K_p e(t)$$

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{k\tau K_p}{J_e} \frac{1}{s^2 + (b_e/J_e)s + (k\tau K_p/J_e)}$$

- asintoticamente stabile $\Rightarrow K_p > 0$
- polo nell'origine sul ramo diretto \Rightarrow sistema di tipo 1 \Rightarrow per ingresso a gradino l'errore a regime è nullo

- calcolo dei parametri caratteristici del sistema del secondo ordine

$$s^2 + (b_e/J_e)s + (k\tau K_p/J_e) = s^2 + 2\omega_n \zeta s + \omega_n^2$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k\tau K_p}{J_e}}$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{b_e}{J_e} \sqrt{\frac{J_e}{k\tau K_p}}$$

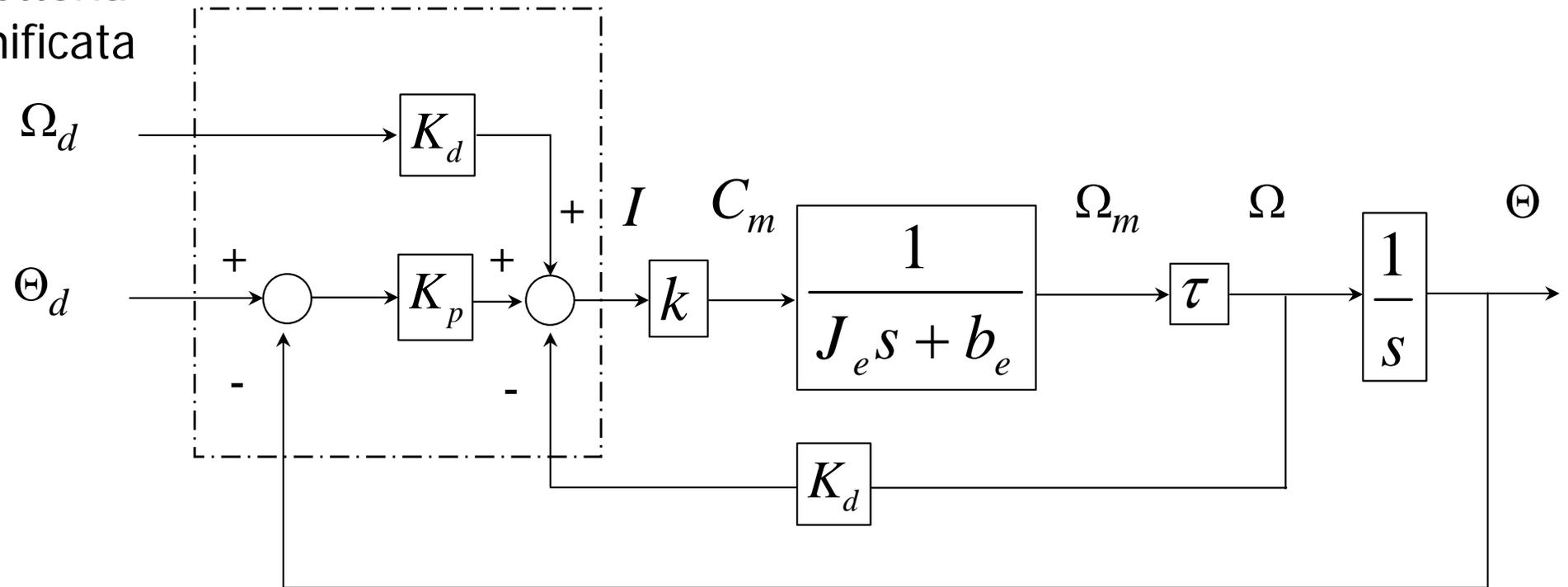
- il sistema, dato il bassissimo valore di b_e , presenta due poli complessi coniugati con smorzamento circa nullo \rightarrow oscilla più o meno a seconda del valore di K_p
- se si cerca di aumentare lo smorzamento fino a $\zeta=1$, K_p avrà valori pressoché nulli \rightarrow la banda passante troppo piccola

- **Non è possibile controllare adeguatamente il braccio con una sola retroazione di posizione con il motore comandato in corrente**

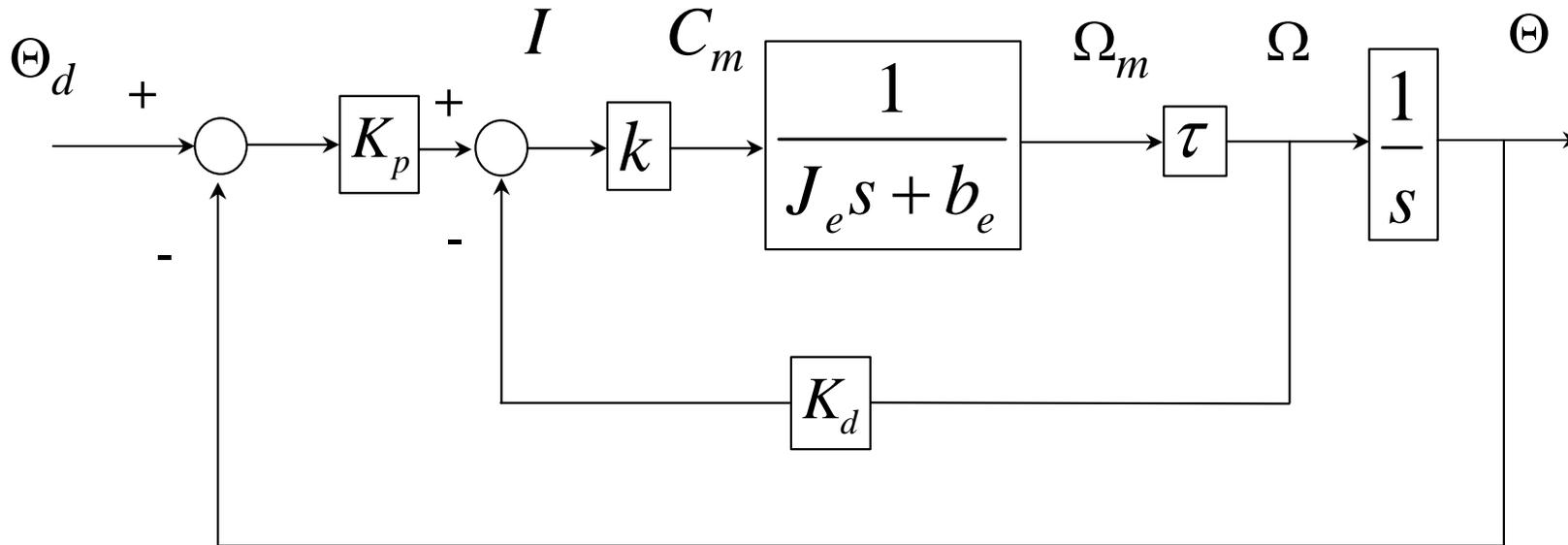
RETROAZIONE DI POSIZIONE E VELOCITÀ

- se si vuole migliorare il comportamento durante il transitorio si deve retroazionare anche la velocità

traiettoria
pianificata



$$i(t) = K_p (\vartheta_d - \vartheta) + K_d (\omega_d - \omega) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t)$$



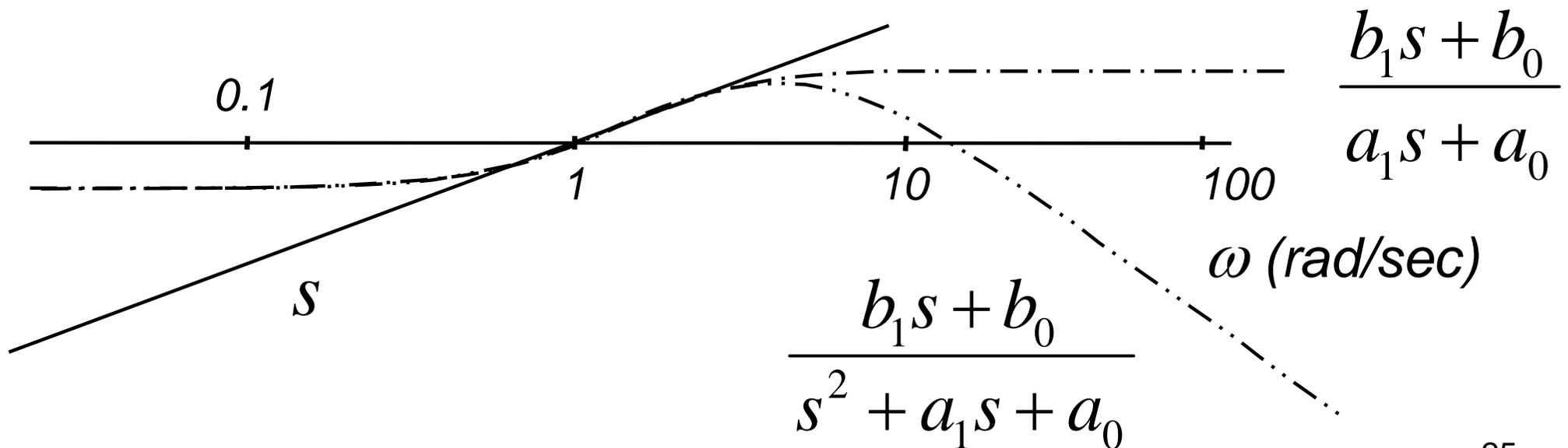
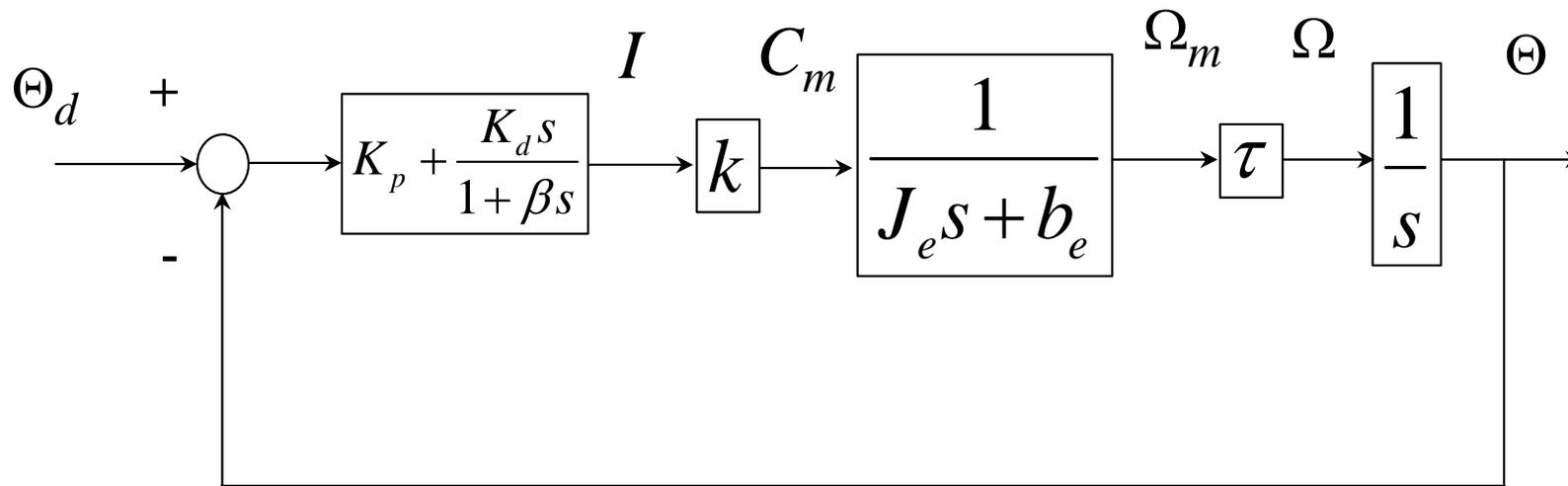
- se ϑ_d è costante ω_d è nulla \Rightarrow la coppia è effettivamente proporzionale all'errore e alla sua derivata

$$i(t) = K_p (\vartheta_d - \vartheta) + K_d (\omega_d - \omega) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t)$$

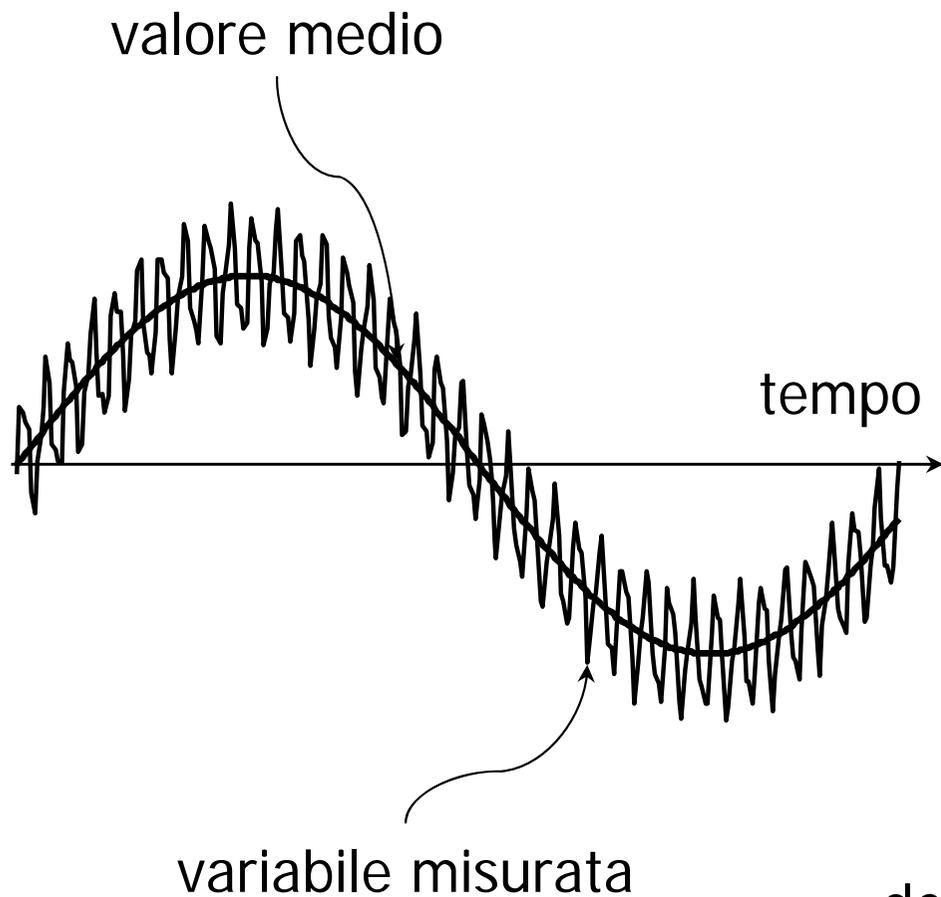
- per ϑ_d variabile basta ridefinire il riferimento aggiungendo un'azione di compensazione di tipo feedforward:

$$\tilde{\vartheta}_d = \vartheta_d + \frac{K_d}{K_p} \omega_d$$

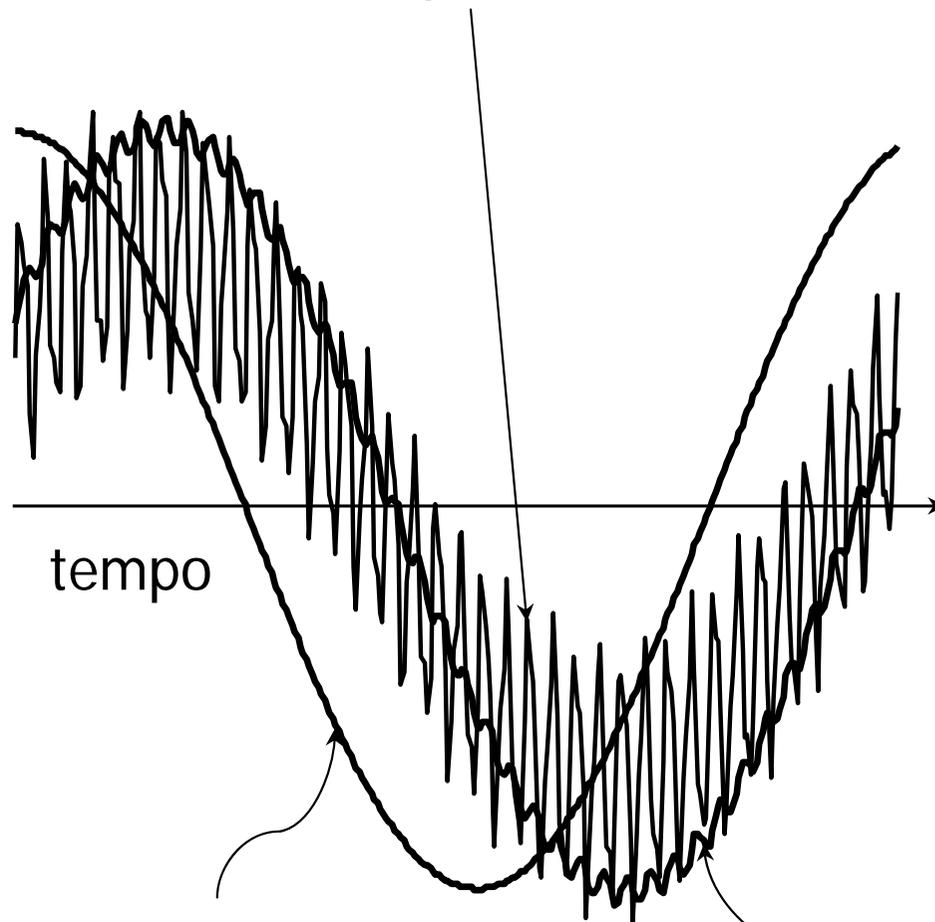
- se non si ha a disposizione un trasduttore di velocità si ricorre ad una derivata numerica e più precisamente ad una derivata in banda utilizzando un filtro del primo o del secondo ordine



Effetto del filtro di stima della derivata

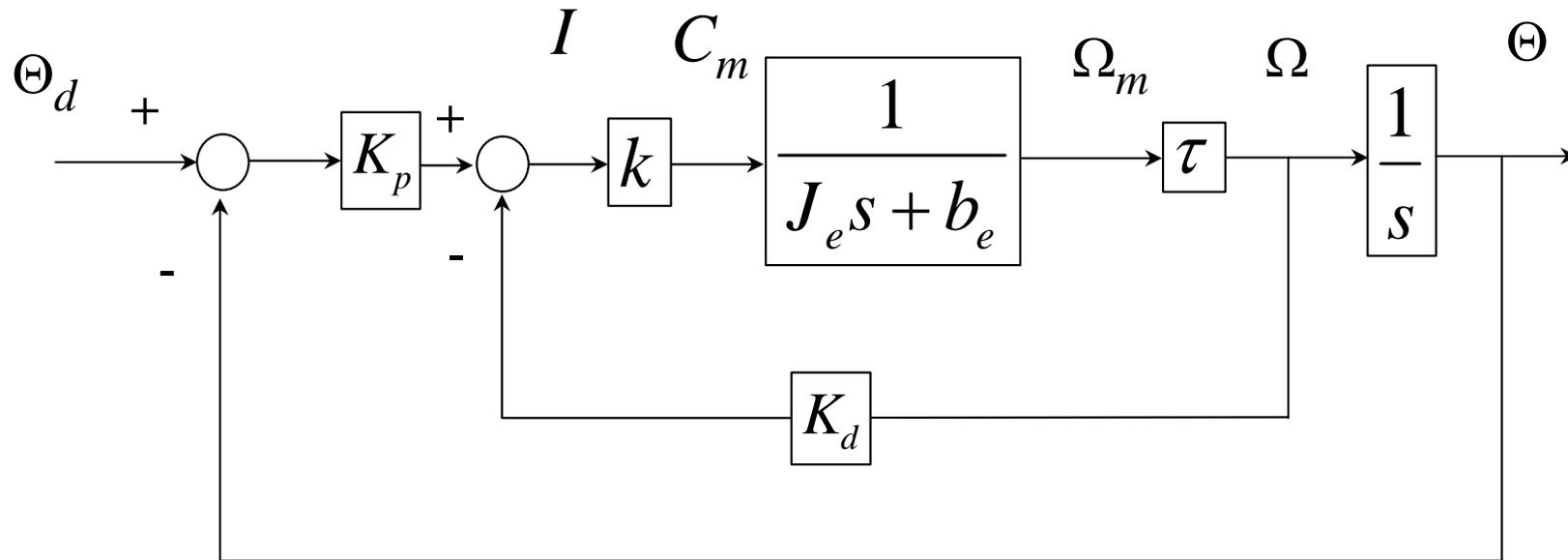


valore stimato della derivata con il filtro del primo ordine



derivata del valore medio

valore stimato della derivata con il filtro del secondo ordine



$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{k\tau K_p}{J_e} \frac{1}{s^2 + (b_e/J_e + k\tau K_d/J_e)s + (k\tau K_p/J_e)}$$

- asintoticamente stabile $\Rightarrow K_p, K_d > 0$
- polo nell'origine sul ramo diretto \Rightarrow sistema di tipo 1 \Rightarrow per ingresso a gradino l'errore a regime è nullo

- calcolo dei parametri caratteristici del sistema del secondo ordine

$$s^2 + \left(b_e / J_e + k\tau K_d / J_e \right) s + \left(k\tau K_p / J_e \right) =$$

$$= s^2 + 2\omega_n \zeta s + \omega_n^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_n = \sqrt{\frac{k\tau K_p}{J_e}} \\ \zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{J_e}{k\tau K_p}} \left(\frac{b_e + k\tau K_d}{J_e} \right) \end{array} \right.$$

- lo smorzamento ζ non deve essere minore di 1 per evitare oscillazioni \rightarrow se $\zeta=1$ (smorzamento critico) si ha la risposta indiciale più rapida senza oscillazioni

- il primo passo consiste nel fissare la pulsazione naturale, ω_n , entro i limiti di validità del modello rigido $\rightarrow K_p$

$$\omega_n \leq \alpha \omega_r \quad \omega_r = \text{risonanza strutturale}$$

- la prima risonanza del braccio considerando l'elasticità concentrata al giunto si può stimare con la formula:

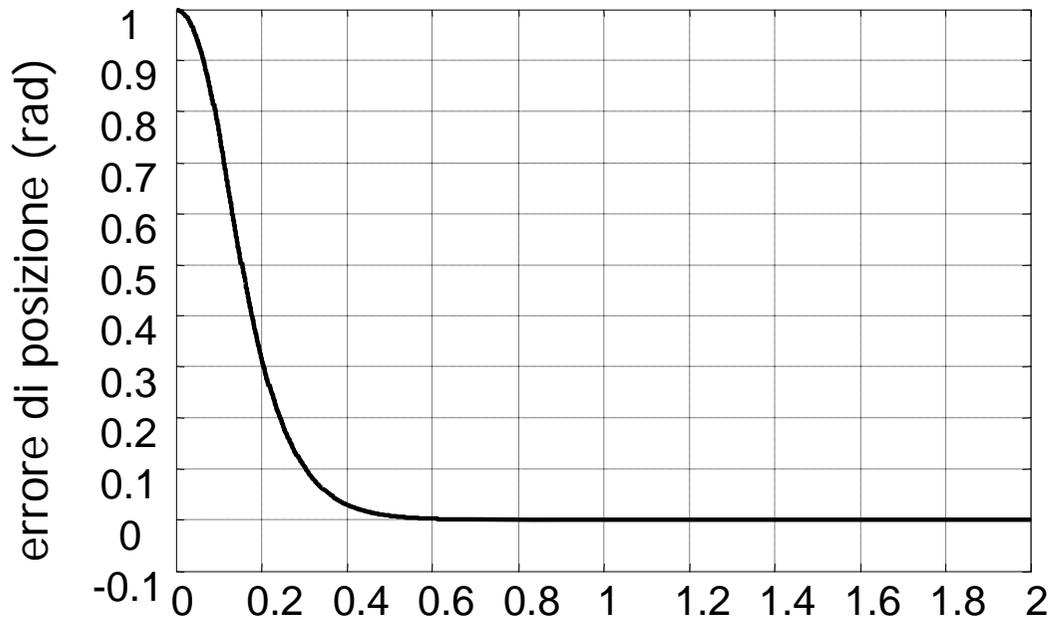
$$\omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{J_e}} \quad k_r = \text{rigidezza torsionale}$$

- ad esempio scegliendo α pari a 0.5 si ha

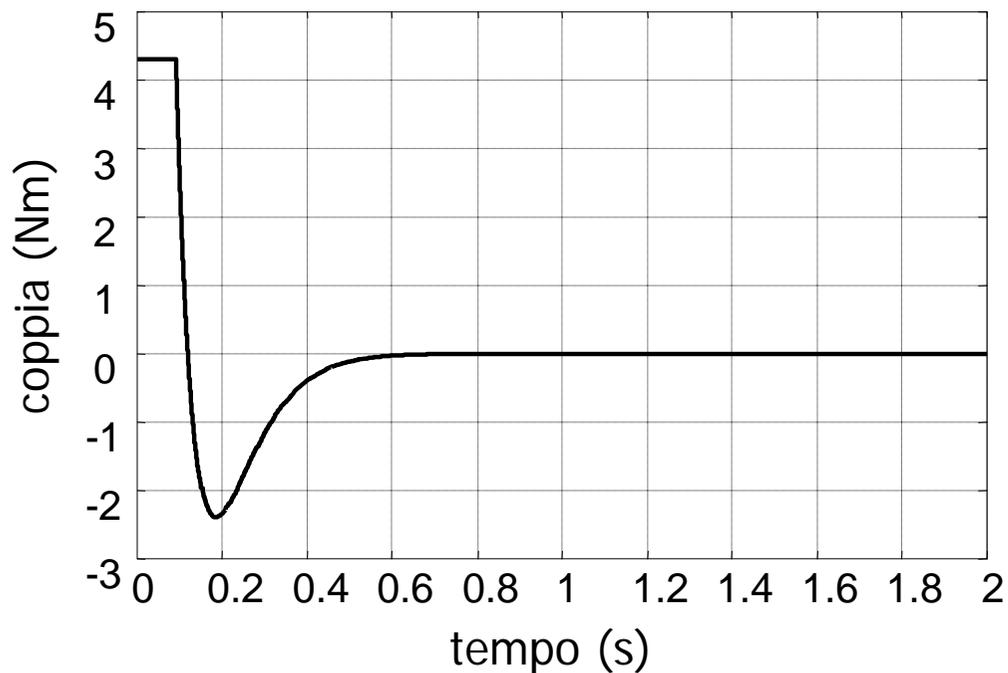
$$0 < K_p \leq \frac{1}{4} \frac{k_r}{k \tau}$$

- per la scelta di K_d basta assicurare che $\zeta = 1$ e avendo scelto il massimo K_p

$$K_d = \frac{\sqrt{k_r J_e} - b_e}{k \tau} > 0$$

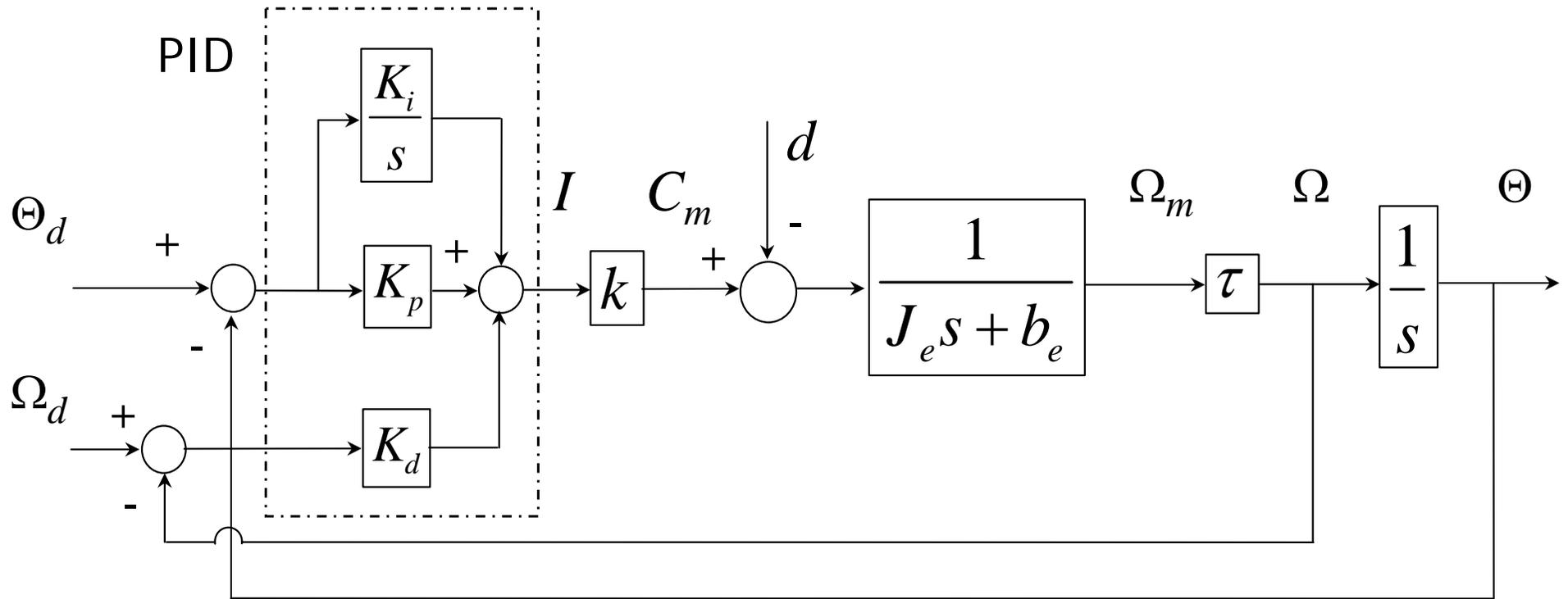


parametri	valori
k	0.215 Nm/A
J_e	$0.88 \cdot 10^{-3}$ Nm s ² /rad
b_e	$8.02 \cdot 10^{-5}$ Nm s/rad
τ	1/100
ω_r	~ 30 rad/s
saturazione	20 A
K_p	92.093
K_d	12.242



- usando $\zeta=1$ lo smorzamento critico
- si ha convergenza rapida
- la coppia satura \rightarrow può causare sovraelongazioni

PID: COMPENSAZIONE DI DISTURBI



$$i(t) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t) + K_i \int e(t) dt$$

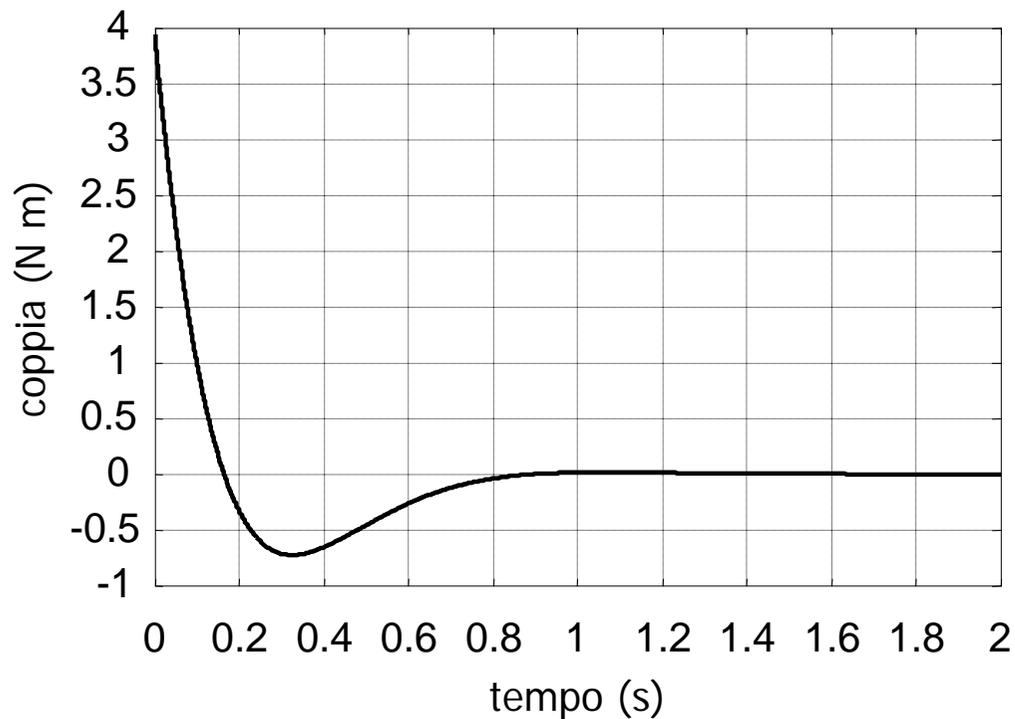
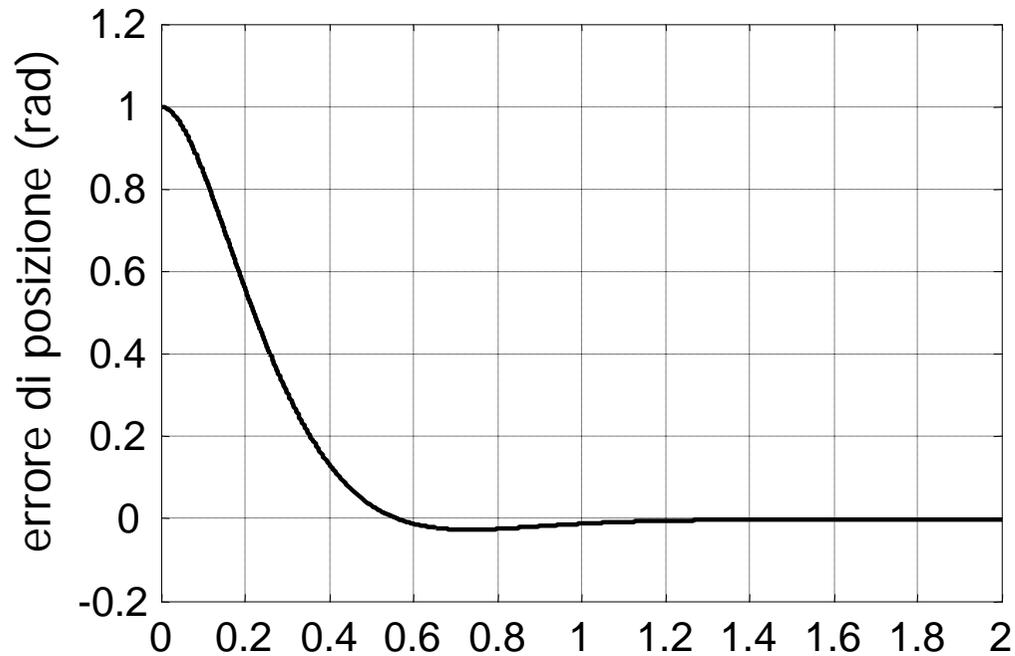
$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{k\tau (K_d s^2 + K_p s + K_i)}{J_e s^3 + (b_e + k\tau K_d) s^2 + k\tau K_p s + k\tau K_i}$$

- applicando il criterio di Routh il sistema ad anello chiuso è asintoticamente stabile $\Rightarrow K_p, K_d, K_i > 0$ e $K_i < (b_e + \tau k K_d) K_p / J_e$
- due poli nell'origine sul ramo diretto \Rightarrow sistema di tipo 2 \Rightarrow per ingresso a gradino e rampa l'errore a regime è nullo
- l'azione integrale agente prima dell'ingresso del disturbo \Rightarrow sistema astatico \Rightarrow errore a regime nullo per disturbo costante
- per la scelta di K_p, K_d e K_i si può procedere con metodi empirici come quello proposto da Ziegler e Nichols oppure con un metodo di ottimizzazione basato su una funzione di costo f

$$f = \int_0^{t_f} [\phi(e) + w_f c_m(t)] dt$$

$$\text{con } \phi \rightarrow w_e |e(t)|, w_e e(t)^2, w_e t |e(t)|, w_e t e(t)^2$$

$$w_f, w_e \rightarrow \text{pesi positivi e scalari}$$



parametri	valori
k	0.215 Nm/A
J_e	$0.88 \cdot 10^{-3}$ Nm s ² /rad
b_e	$8.02 \cdot 10^{-5}$ Nm s/rad
τ	1/100
saturazione	20 A
K_p	18.311
K_d	4.173
K_i	0.24207

- usando $\phi = e(t)^2$, $w_e = 1$
 $w_f = 1/12$
- piccola sovraelongazione
- la coppia non satura

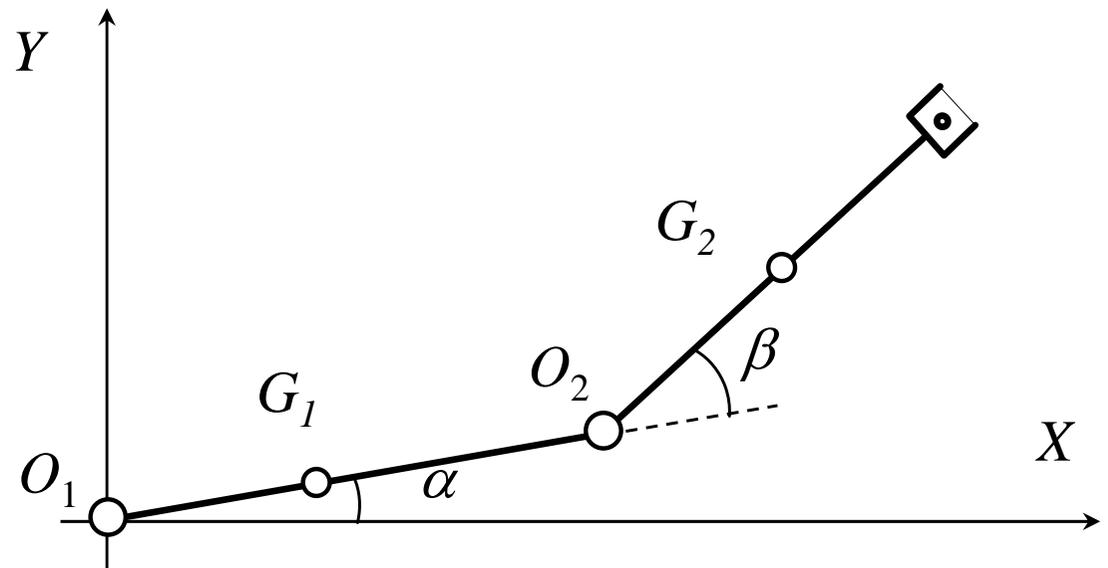
CONSIDERAZIONI SUL CONTROLLO DI ROBOT REALI

- Le indicazioni ottenute sulla base di sistemi molto semplici devono essere **ampliate** per divenire applicabili a **sistemi robotici reali**. Sinora si sono considerati sistemi robotici con
 - **1 grado di mobilità**
 - **Funzioni di Trasferimento** dei componenti semplificate e linearizzate in un intorno del punto di lavoro
 - ❖ **rigidi** ➔ assenza di effetti elastici
 - ❖ assenza di **non linearità**
 - ❖ parametri costanti
- Per progettare sistemi di controllo efficienti è necessario includere alcuni aspetti **realistici** nel **modello del sistema**
 - effetti legati alla **dinamica dei sistemi multicorpo**
 - ❖ **azione mutua** tra membri
 - ❖ **variabilità** dei momenti d'inerzia
 - effetti dovuti al **campo gravitazionale**
 - effetti dell'**attrito**
 - effetti legati all'**elasticità**

AZIONE MUTUA TRA MEMBRI

- Tramite un manipolatore planare a 2 bracci si mostra la natura delle **azioni** che due **membri contigui si scambiano** attraverso il **giunto**

l_1, l_2 lunghezze dei bracci
 g_1 e g_2 distanza dei centri
di massa da O_1 e O_2

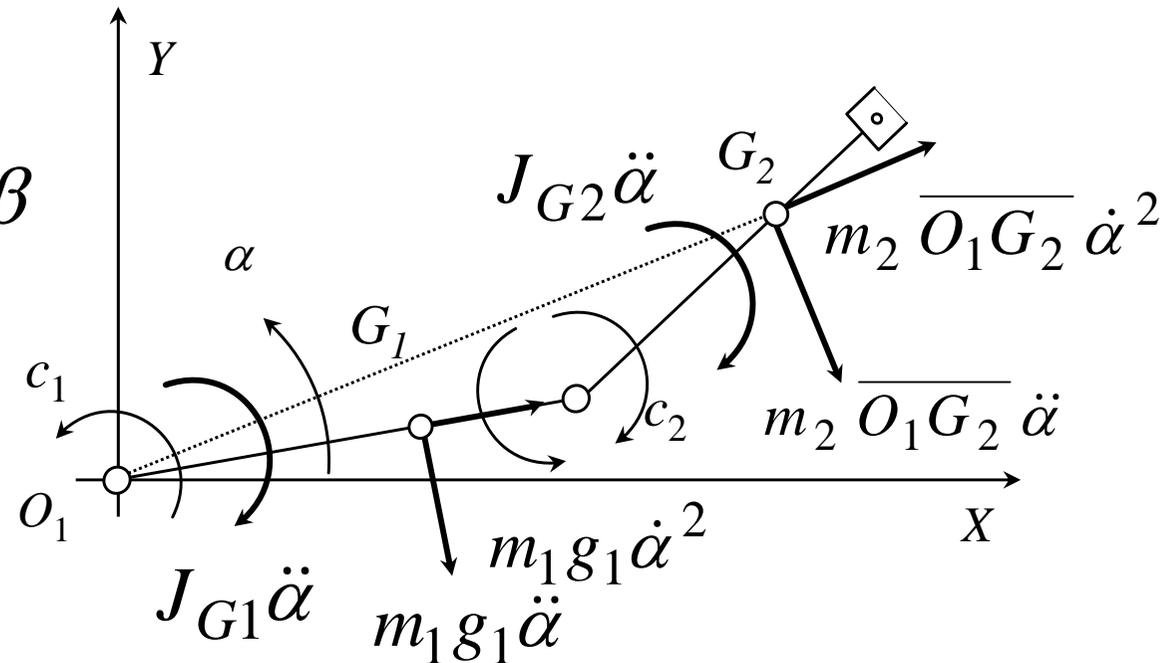


- consideriamo separatamente i moti che si ottengono con
 - rotazione di α con β fisso
 - rotazione di β con α fisso

Rotazione di α con β fisso

- il motore del giunto 2 per mantenere costante β deve fornire la coppia c_2

$$\overline{O_1 G_2}^2 = l_1^2 + g_2^2 + 2l_1 g_2 \cos \beta$$



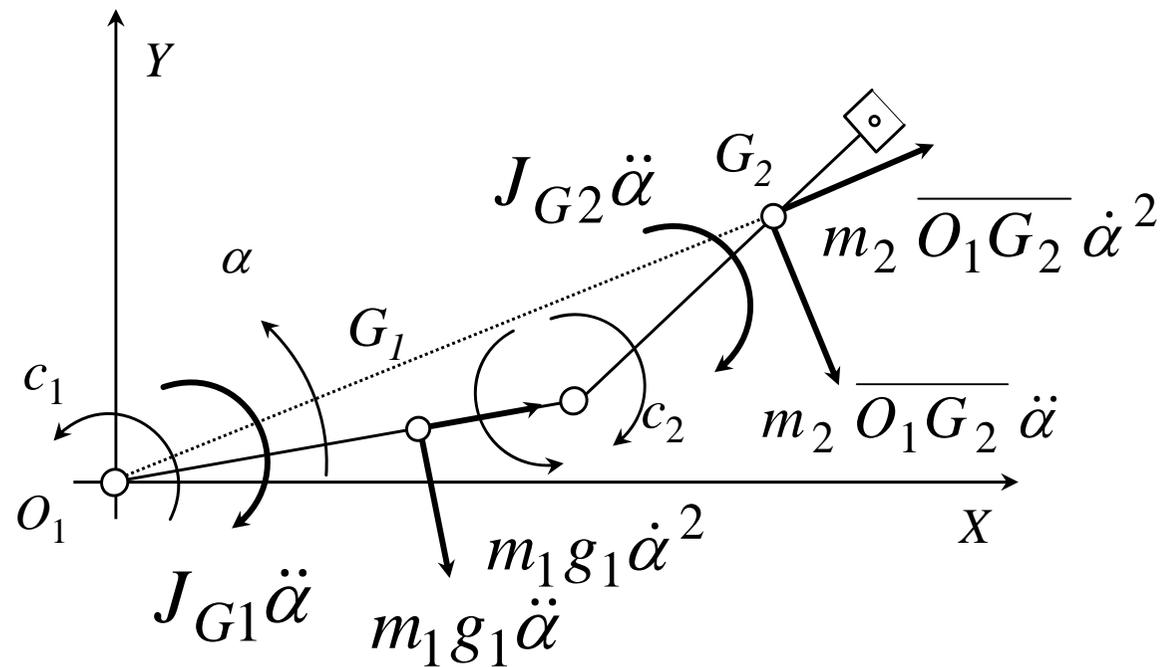
- momento d'inerzia dei bracci 1 e 2 rispetto all'asse passante per O_1 e ortogonale al piano XY

$$\begin{aligned} J_{O_1} &= J_{G_1} + m_1 g_1^2 + J_{G_2} + m_2 \cdot \overline{O_1 G_2}^2 = \\ &= J_{G_1} + m_1 g_1^2 + J_{G_2} + m_2 \left(l_1^2 + g_2^2 + 2l_1 g_2 \cos \beta \right) \end{aligned}$$

λ_1 e $\lambda_2 \rightarrow$ bracci delle forze d'inerzia del secondo membro rispetto a O_2

$$\lambda_1 = \frac{g_2 (g_2 + l_1 \cos \beta)}{\overline{O_1 G_2}}$$

$$\lambda_2 = \frac{g_2 l_1}{\overline{O_1 G_2}} \sin \beta$$



- le **coppie** fornite dai motori per produrre questo moto sono

$$c_1 = J_{O1} \ddot{\alpha} = \left(J_{G1} + m_1 g_1^2 + J_{G2} + m_2 \cdot \overline{O_1 G_2}^2 \right) \ddot{\alpha}$$

$$c_2 = \left(J_{G2} + \lambda_1 m_2 \cdot \overline{O_1 G_2} \right) \ddot{\alpha} + \lambda_2 m_2 \cdot \overline{O_1 G_2} \dot{\alpha}^2$$

- la c_1 si ottiene facendo l'equilibrio dei momenti di tutto il sistema attorno a O_1
- la c_2 si ottiene facendo l'equilibrio dei momenti del solo braccio terminale attorno a O_2

Rotazione di β con α fisso

- il motore del giunto 1 per mantenere costante α deve fornire la coppia c_1

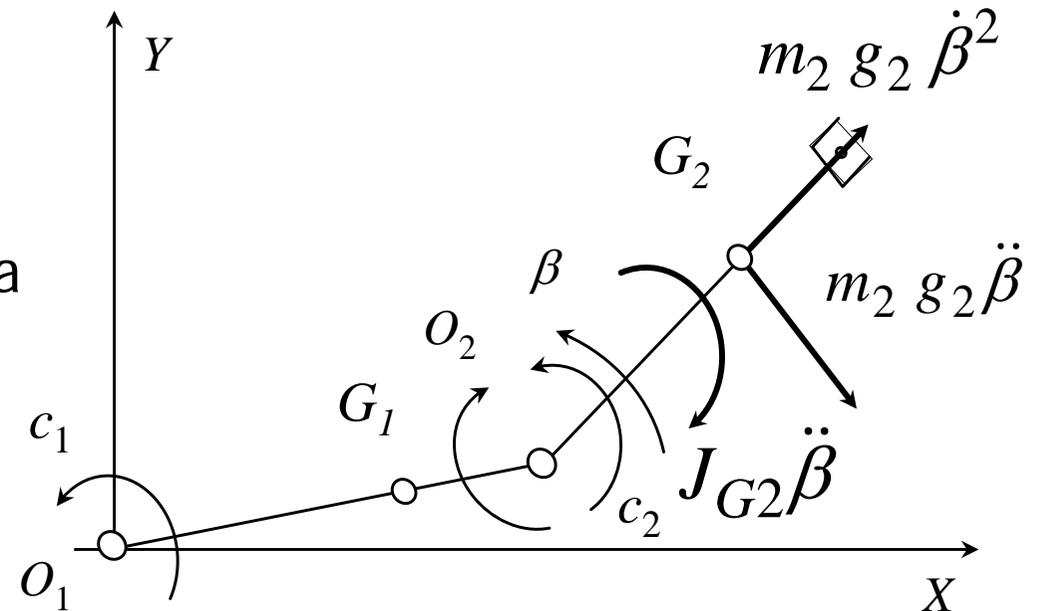
momento d'inerzia del braccio 2
rispetto all'asse O_2

$$J_{O_2} = J_{G_2} + m_2 g_2^2$$

λ_3 e $\lambda_4 \rightarrow$ bracci delle forze d'inerzia
del secondo membro rispetto a O_1

$$\lambda_3 = g_2 + l_1 \cos \beta$$

$$\lambda_4 = l_1 \sin \beta$$



- le **coppie** fornite dai motori per produrre questo moto sono procedendo come al caso precedente

$$c_1 = (J_{G_2} + \lambda_3 m_2 g_2) \ddot{\beta} - \lambda_4 m_2 g_2 \dot{\beta}^2$$

$$c_2 = J_{O_2} \ddot{\beta} = (J_{G_2} + m_2 g_2^2) \ddot{\beta}$$

Rotazioni generiche di α e β

- Nel moto generale con rotazioni di α e β , in forma matriciale, si ha

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} m_2 g_2 l_1 \sin \beta (\dot{\beta}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}) \\ -m_2 g_2 l_1 \sin \beta \dot{\alpha}^2 \end{Bmatrix}$$

$$J_{11} = J_{G1} + m_1 g_1^2 + J_{G2} + m_2 (l_1^2 + g_2^2 + 2l_1 g_2 \cos \beta)$$

$$J_{22} = J_{G2} + m_2 g_2^2$$

$$J_{12} = J_{21} = m_2 g_2 (g_2 + l_1 \cos \beta) + J_{G2}$$

- Per la presenza di più bracci \rightarrow la coppia che deve essere fornita da ciascun attuatore non è del tipo $J\ddot{\theta}$ come ipotizzato nelle precedenti considerazioni, in quanto i vari **GdL** si influenzano reciprocamente

- Per utilizzare le informazioni ottenute con un **robot** ad 1 **GdL**, la situazione rappresentata dall'**equazione matriciale** vista sinteticamente è rappresentabile

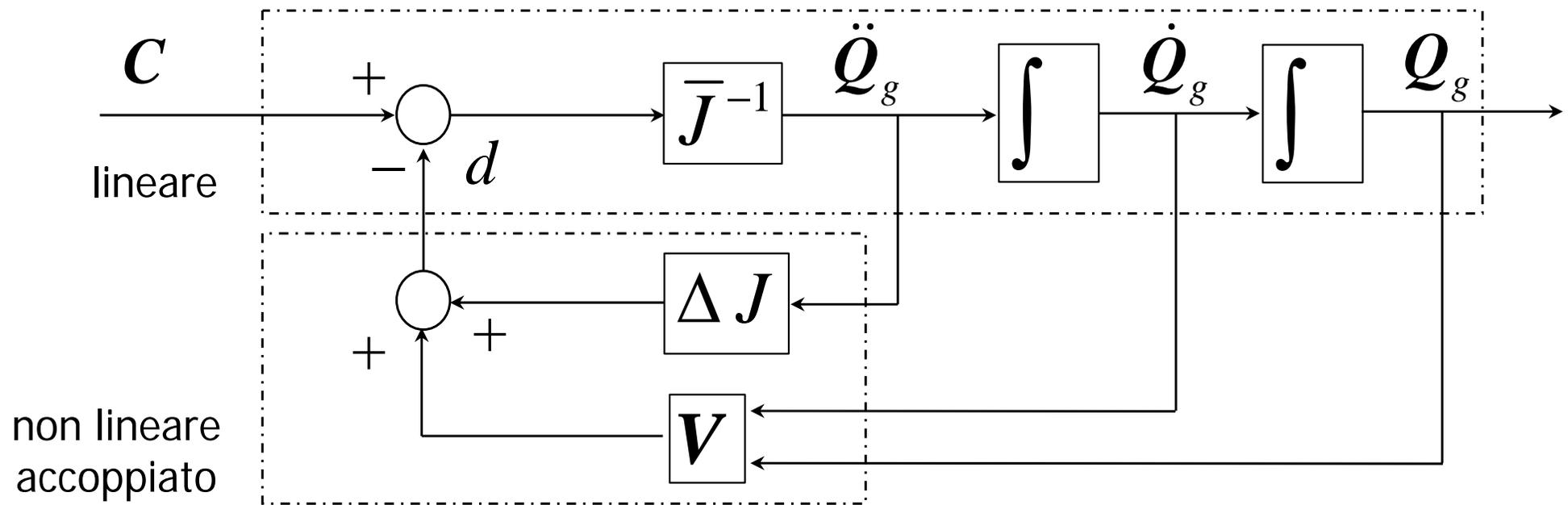
$$\mathbf{C} = \left[\bar{J} + \Delta J(Q_g) \right] \ddot{\mathbf{Q}}_g + \mathbf{V}(Q_g, \dot{\mathbf{Q}}_g)$$

$$\mathbf{C} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{Q}_g = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad \mathbf{V} = - \begin{Bmatrix} m_2 g_2 l_1 \sin \beta (\dot{\beta}^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}) \\ -m_2 g_2 l_1 \sin \beta \dot{\alpha}^2 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} J_{G1} + m_1 g_1^2 + J_{G2} + m_2 (l_1^2 + g_2^2) & 0 \\ 0 & J_{G2} + m_2 g_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta J = \begin{bmatrix} 2m_2 l_1 g_2 \cos \beta & m_2 g_2 (g_2 + l_1 \cos \beta) + J_{G2} \\ m_2 g_2 (g_2 + l_1 \cos \beta) + J_{G2} & 0 \end{bmatrix}$$

- l'equazione può essere schematizzata con lo schema a blocchi



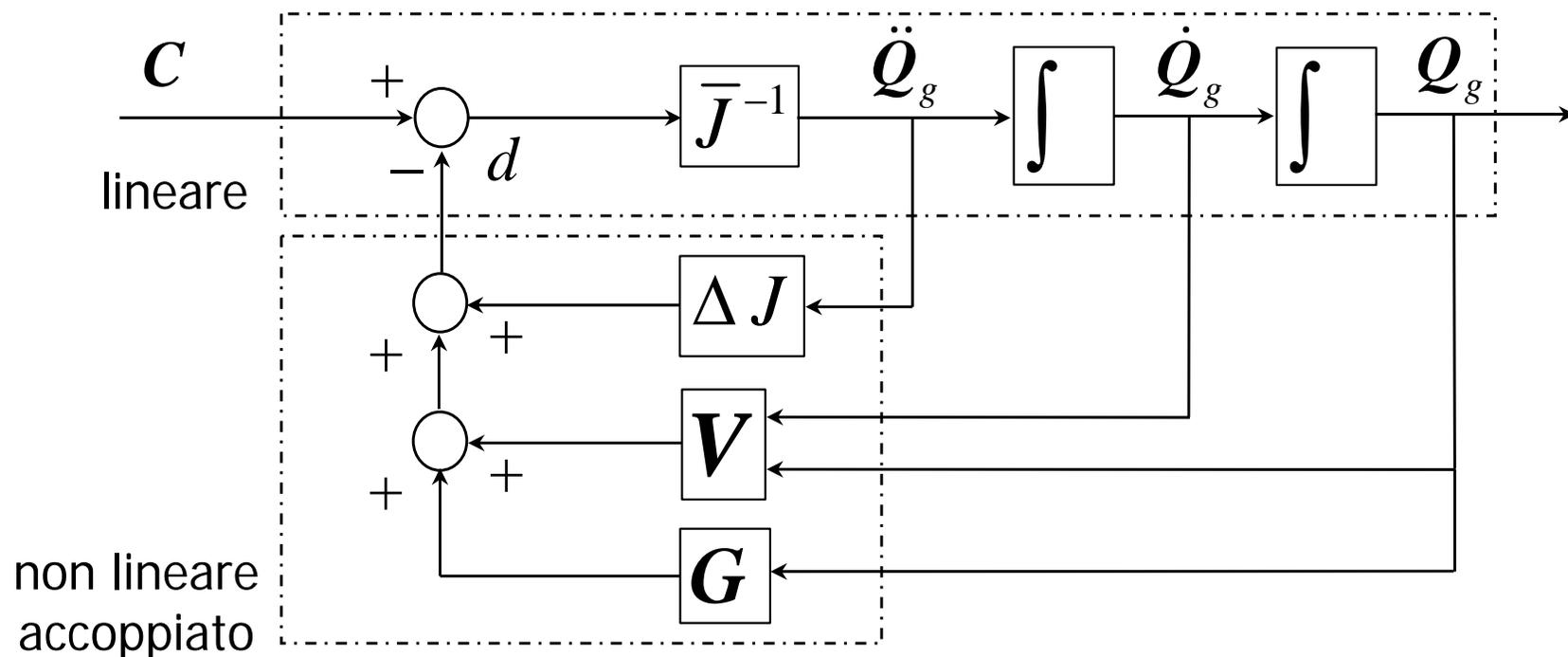
- il **blocco lineare** è del tipo ad 1 **GdL**
 - ❖ opera su un sistema di momento d'inerzia **diagonale** e **costante** \bar{J} che rappresenta l'inerzia media vista dai rispettivi giunti
- il **blocco non lineare** rappresenta anche l'accoppiamento
 - ❖ le matrici ΔJ e V (matrice delle forze d'inerzia \rightarrow centrifughe e di Coriolis) non sono diagonali \rightarrow possono interpretarsi come **ingressi secondari**

COMPENSAZIONE DELLE AZIONI MUTUE TRA MEMBRI

- Se le caratteristiche dinamiche del manipolatore sono note è possibile costruire un **modello per la compensazione** del disturbo prodotto dalle **azioni mutue** tra bracci
- **Modello matematico del manipolatore** nello spazio dei giunti

$$\mathbf{C} = \left[\bar{\mathbf{J}} + \Delta \mathbf{J}(\mathbf{Q}_g) \right] \ddot{\mathbf{Q}}_g + \mathbf{V}(\mathbf{Q}_g, \dot{\mathbf{Q}}_g) + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_g)$$

$\Delta \mathbf{J}(\mathbf{Q}_g)$ = parte variabile matrice delle inerzie

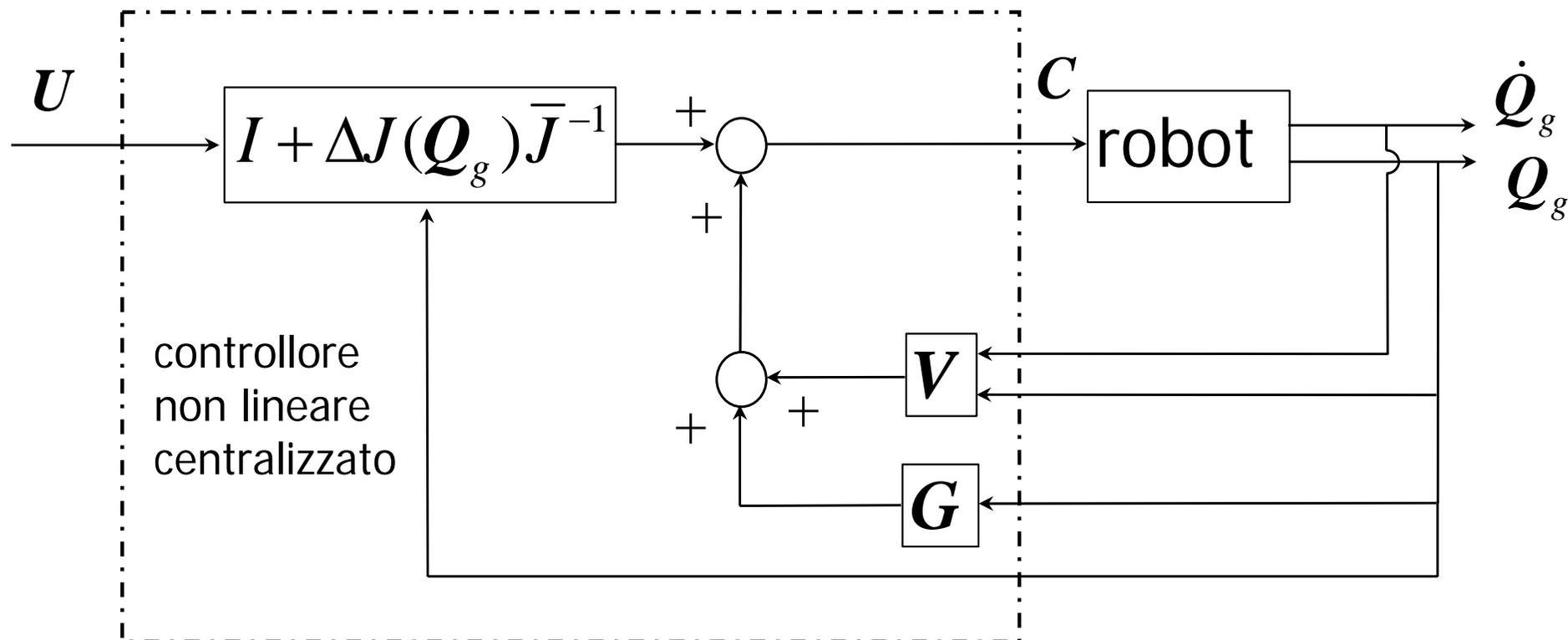


- La compensazione delle azioni mutue e non lineari si ottiene calcolando le **coppie** con questa espressione

$$\mathbf{C} = \left[\bar{\mathbf{J}} + \Delta\mathbf{J}(\mathbf{Q}_g) \right] \bar{\mathbf{J}}^{-1} \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mathbf{Q}_g, \dot{\mathbf{Q}}_g) + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_g)$$

\mathbf{U} è l'ingresso al controllore centralizzato

che realizza il disaccoppiamento e la linearizzazione



- Si ottiene così il sistema lineare

$$U = \bar{J}\ddot{Q}_g$$

- Dove le azioni U si possono ottenere con leggi di controllo per controllori locali del tipo

$$\bar{J}^{-1}U = \ddot{Q} = \ddot{Q}_d + K_p (Q_d - Q) + K_d (\dot{Q}_d - \dot{Q})$$

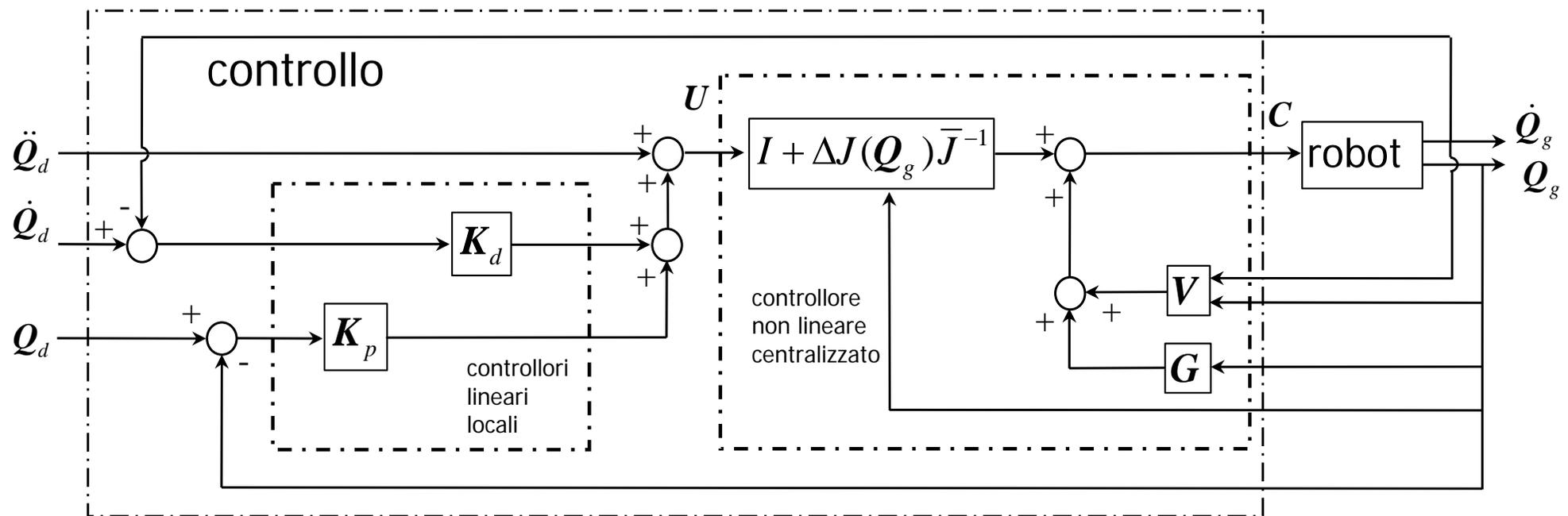
K_p e K_d matrici diagonali

- L'evoluzione dell'errore di posizione è **disaccoppiata** e **lineare**

$$\ddot{H} + K_d \dot{H} + K_p H = 0$$

$$\text{con } H = Q_d - Q$$

- L'errore converge a zero con velocità che dipende da K_p e K_d se sono **definite positive**
- L'errore resta nullo se H e la sua derivata in $t=0$ sono nulli



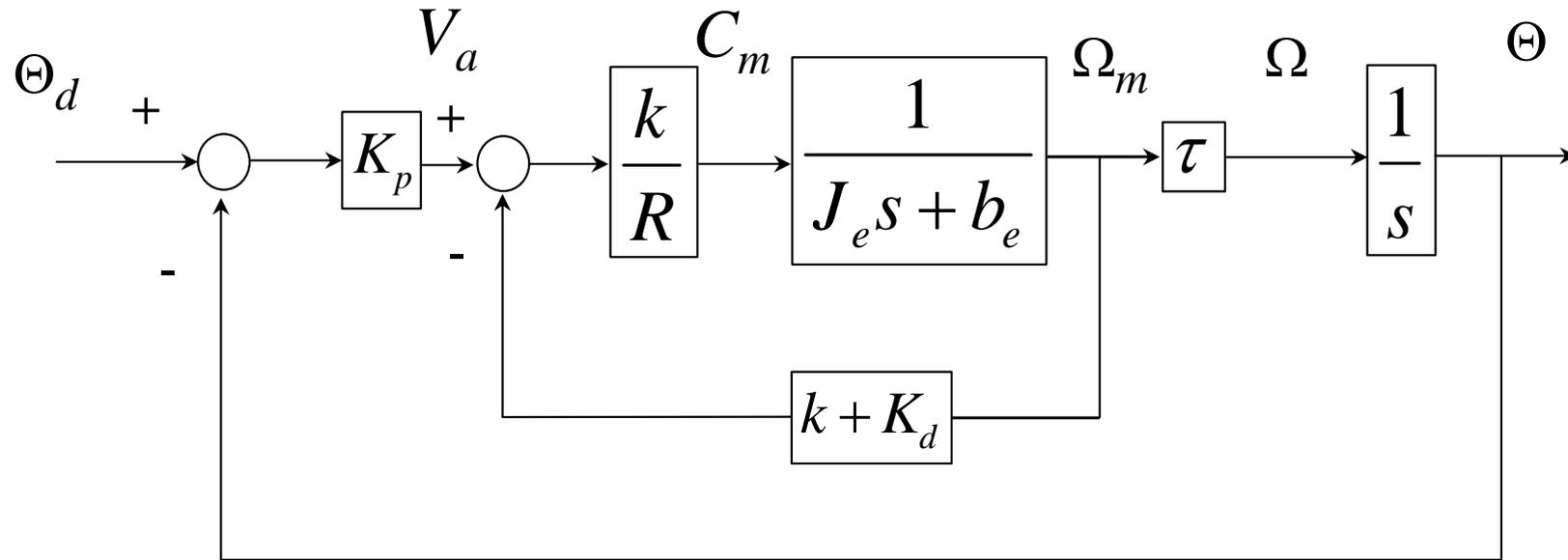
- Il metodo descritto presenta la possibilità di seguire una **qualsiasi traiettoria**
- Ha alcuni **svantaggi**
 - ❖ i **calcoli** relativi al blocco di compensazione (sistema di n equazioni) devono **essere eseguiti a ogni ciclo** del processo di controllo durante il moto del robot ➔ **sistema di calcolo costoso**
 - ❖ è necessaria una **conoscenza completa del sistema** non sempre possibile
- È **poco utilizzato** per i controllori di robot industriali

MOMENTI D'INERZIA VARIABILI

- In un robot con più membri il **momento d'inerzia** sentito da ciascun attuatore **varia** con la postura
- Questa variazione influenza gli **effetti del controllo**
- Consideriamo la retroazione di
 - **Posizione e Velocità**
 - ❖ con motore in corrente continua pilotato in **tensione**
 - ❖ con motore in corrente continua pilotato in **corrente**
- Valutiamo l'effetto sulle **FT** a anello chiuso per le variazioni del momento d'inerzia del manipolatore

Motore Pilotato In Tensione

- Lo schema a blocchi è il seguente



$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{k\tau K_p}{R J_e} \frac{1}{s^2 + \frac{[Rb_e + k(k + K_d)]}{R J_e} s + \frac{k\tau K_p}{R J_e}}$$

- La **pulsazione naturale** e lo **smorzamento** sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_n = \sqrt{\frac{k\tau K_p}{R J_e}} \\ \zeta = \frac{1}{2} \frac{[Rb_e + k(k + K_d)]}{\sqrt{k\tau K_p R J_e}} \end{array} \right.$$

all'**umentare** di J_e

- la **pulsazione naturale** ω_n e quindi la **banda passante** **diminuiscono** ➔ il **sistema risponde più lentamente** ai comandi del motore
- lo **smorzamento diminuisce** ➔ pericolo di **oscillazioni** e **sovraelongazioni**

- La **pulsazione naturale** e lo **smorzamento** sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_n = \sqrt{\frac{k\tau K_p}{J_e}} \\ \zeta = \frac{1}{2} \frac{(b_e + k\tau K_d)}{\sqrt{k\tau K_p J_e}} \end{array} \right.$$

- anche in questo caso all'**umentare di J_e** la **pulsazione naturale ω_n** e quindi la **banda passante diminuiscono**
- analogo comportamento mostra lo **smorzamento**

- Per tutti i casi esaminati l'**aumento del momento d'inerzia** sentito da ciascun motore fa variare il comportamento del sistema
 - **diminuzione** della **banda passante**
 - **diminuzione** dello **smorzamento**
- È necessario prendere alcuni provvedimenti
 - impiegare controllori in grado di compensare questi effetti
 - al fine di **evitare sovraelongazioni** occorre scegliere i parametri dei controllori in modo tale che per le configurazioni che comportano i momenti d'inerzia massimi si abbia $\zeta = 1 \Rightarrow$ **posizionamenti più lenti** nelle altre configurazioni che hanno $\zeta > 1$
- La variazione dei momenti d'inerzia rendono il **sistema non lineare**, in realtà le variazioni sono in genere piccole

$$J_i = J_{mi} + \tau^2 J_{vi} \quad \begin{cases} J_{mi} = \text{momento d'inerzia del motore e del riduttore (costante)} \\ J_{vi} = \text{termine variabile, } \tau = \text{rapporto di trasmissione} \ll 1 \end{cases}$$

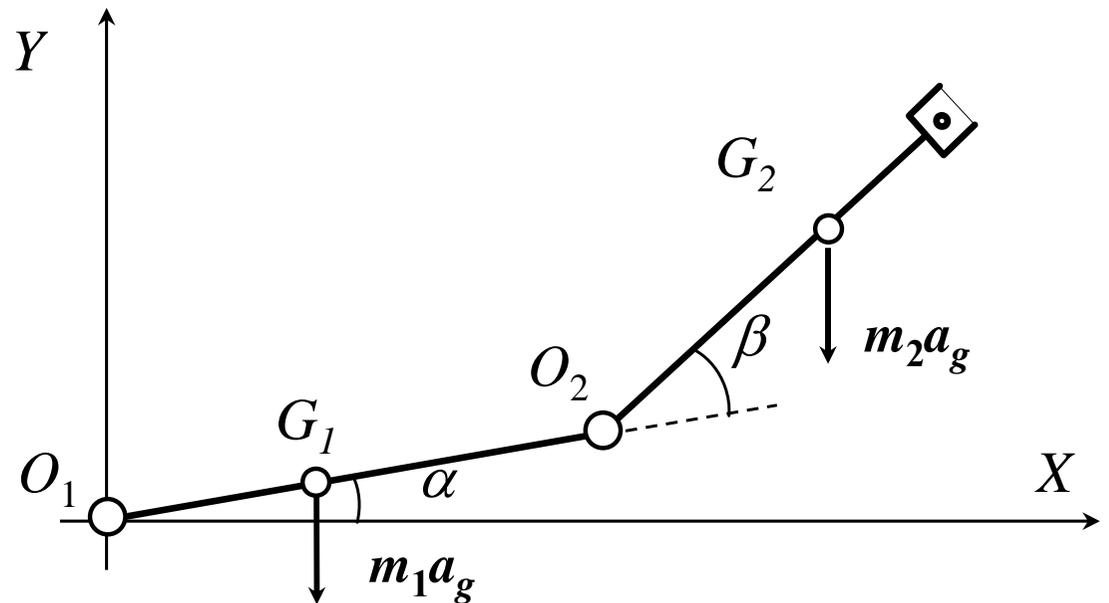
CAMPO DELLE FORZE PESO

- Sia un robot planare a 2 bracci disposto nel piano verticale
- Le coppie c_1 e c_2 dovute al **peso** dipendono dall'accelerazione di gravità a_g

$$c_1 = m_1 a_g g_1 \cos \alpha + m_2 a_g [l_1 \cos \alpha + g_2 \cos (\alpha + \beta)]$$

$$c_2 = m_2 a_g g_2 \cos (\alpha + \beta)$$

l_1, l_2 lunghezze dei bracci
 g_1 e g_2 distanza dei centri di massa da O_1 e O_2



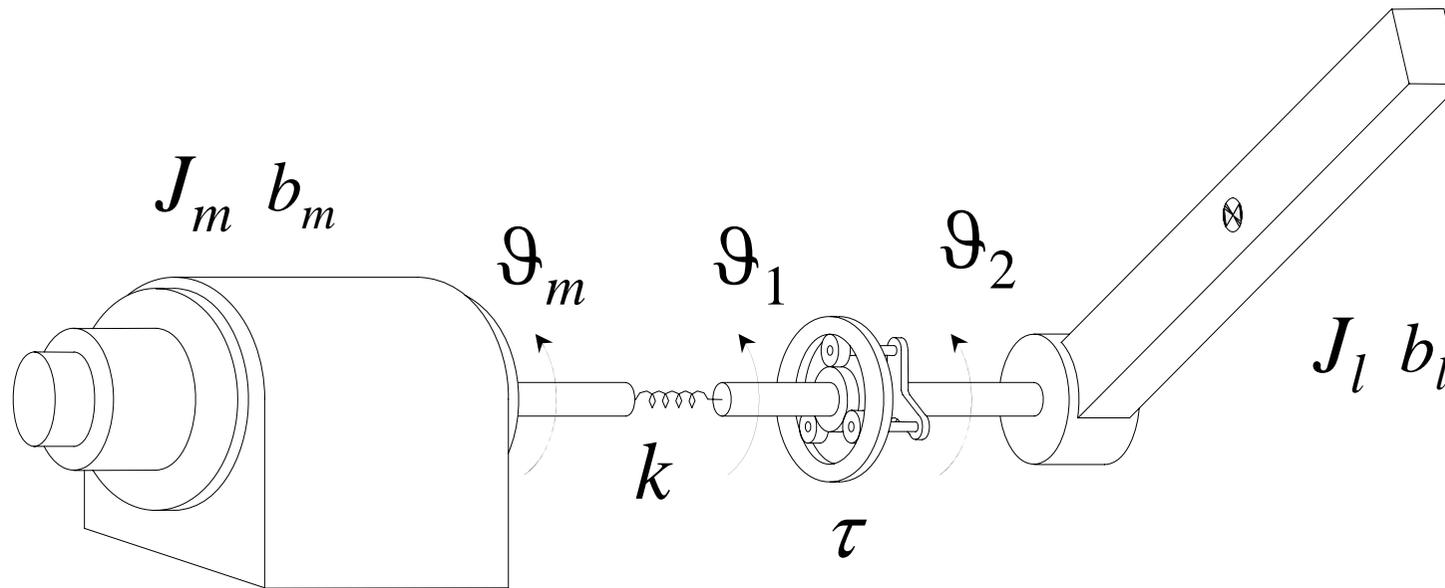
- Queste coppie resistenti **devono essere compensate anche con robot fermo** → usando un controllore con **azione integrativa**

EFFETTI DELL'ATTRITO

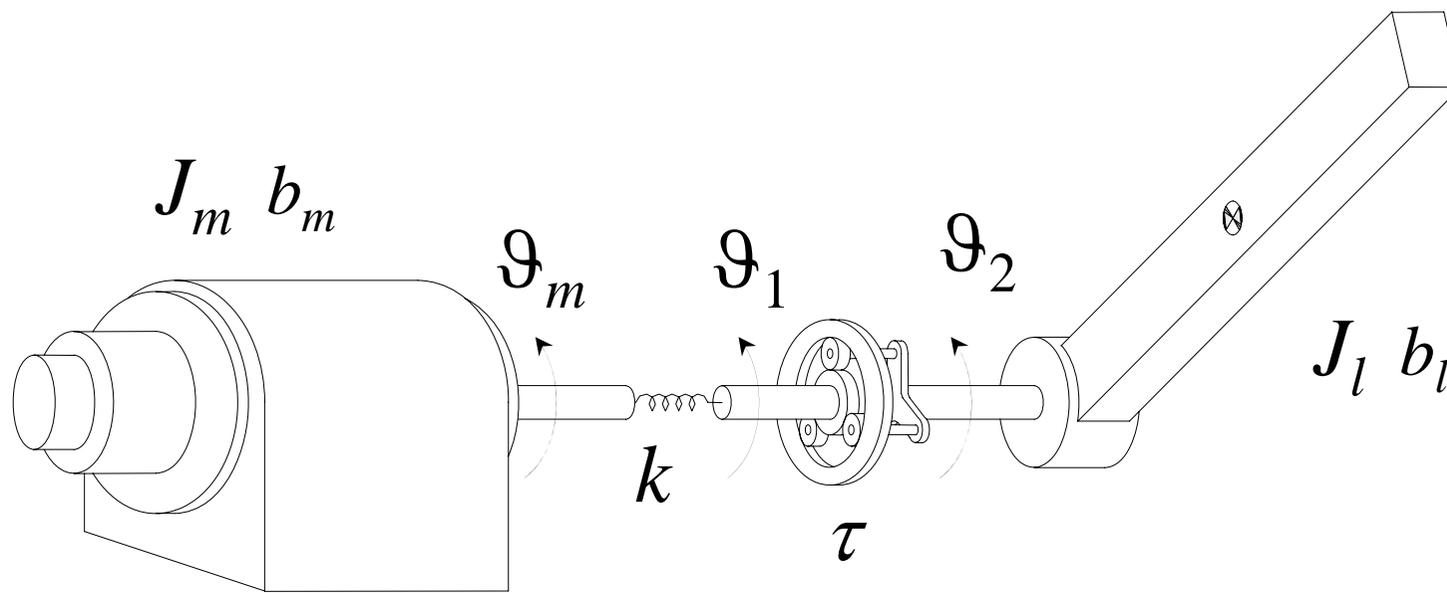
- **L'attrito radente** o di **Coulomb** genera coppie resistenti C_r contrarie alla direzione del moto e modulo circa costante
 - questo disturbo è nullo quando il robot è fermo
 - introduce una **non linearità** $\Rightarrow C_r = - |C_r| \text{segno}(\omega_m)$
 - dato che il **coefficiente d'attrito** non è perfettamente costante si ha il fenomeno **alle basse velocità** dello **stick-slip** \Rightarrow **movimento a scatti**
 - è **compensato** da un'azione **integrativa** del controllore \Rightarrow **pericolo di instabilità**
- **L'attrito statico** produce coppie durante il transitorio di avvio
 - sono **compensate** da regolatori con **azione integrativa** \Rightarrow **pericolo di instabilità**

EFFETTO DELL' ELASTICITÀ SU UN GIUNTO

Modello per la Rappresentazione dell' Elasticità sul Giunto

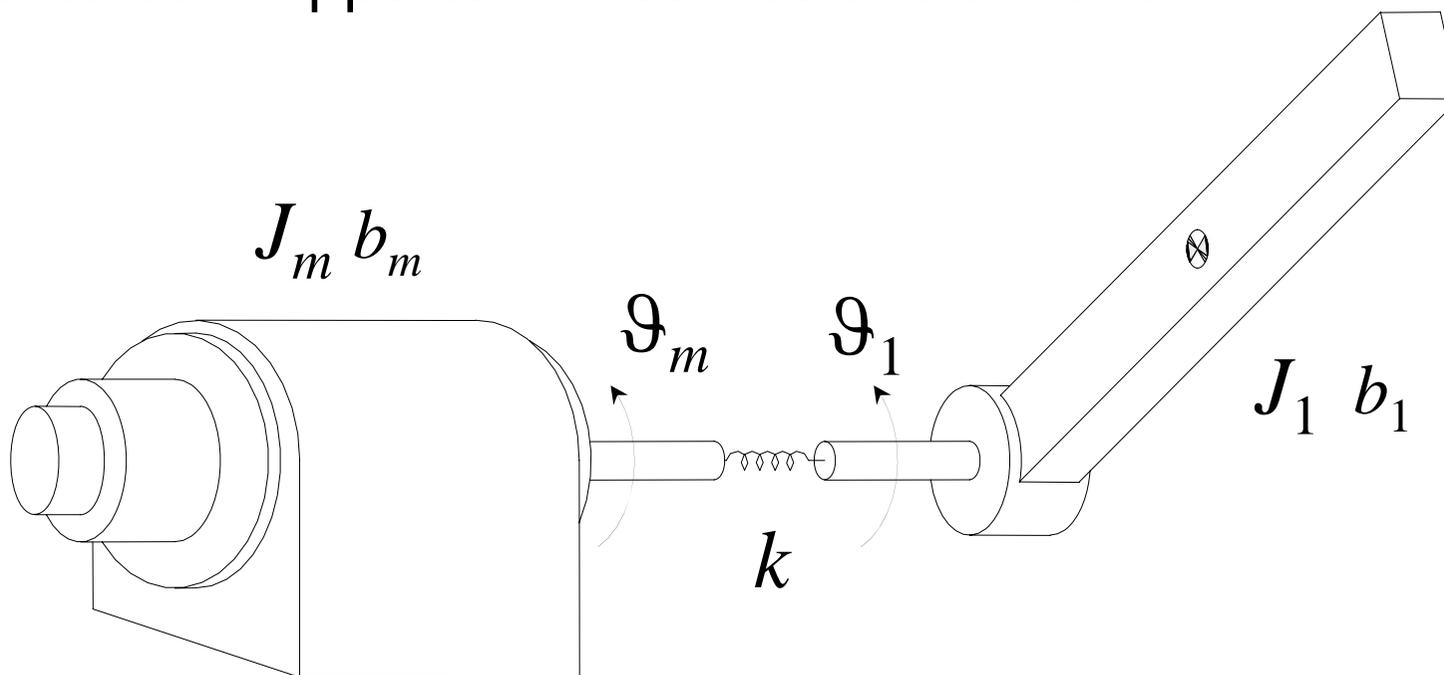


- Il robot non è un sistema rigido \Rightarrow la **trasmissione** e il **riduttore** di velocità introducono una deformabilità torsionale significativa per una brusca applicazione della coppia motrice
- In genere l'accoppiamento tra **motore** e **carico** non può essere considerato rigido
- La deformabilità può essere pensata ridotta ad un unico elemento



- τ → rapporto di trasmissione del riduttore di velocità assunto ideale
- J_m → momento d'inerzia di motore e trasmissione a monte del riduttore di velocità
- J_l → momento d'inerzia di braccio e trasmissione a valle del riduttore di velocità
- k → rigidezza torsionale dell'albero + riduttore + trasmissione
- b_m e b_l → smorzamento viscoso rispettivamente lato motore e lato braccio
- ϑ_m → posizione angolare del motore
- $\vartheta_1 - \vartheta_m$ → deformazione torsionale dovuta all'elasticità
- ϑ_2 → posizione angolare del carico $\vartheta_2 = \tau \vartheta_1$

- Lo schema assume realisticamente che la **posizione** e la **velocità** sono **misurati sull'albero motore** e non sul carico
- Il modello può essere semplificato ricorrendo a uno schema equivalente con rapporto di trasmissione unitaria $\Rightarrow \tau=1$

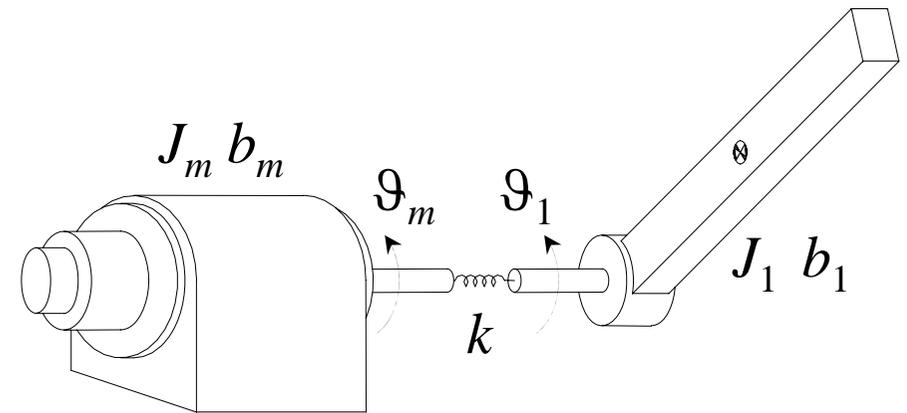


- $J_1 = \tau^2 J_l$ \rightarrow momento d'inerzia ridotto all'albero motore
 $b_1 = \tau^2 b_l$ \rightarrow coefficiente d'attrito viscoso ridotto all'albero motore
 $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 / \tau$ \rightarrow velocità del carico ridotta all'albero motore,
 in assenza di elasticità si avrebbe $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_m$

- Il modello matematico nel dominio del tempo e relativo modello fisico:

$$J_1 \ddot{\vartheta}_1 + b_1 \dot{\vartheta}_1 + k(\vartheta_1 - \vartheta_m) = 0$$

$$J_m \ddot{\vartheta}_m + b_m \dot{\vartheta}_m - k(\vartheta_1 - \vartheta_m) = c_m(t)$$



- nel dominio di Laplace:

$$p_1(s) \Theta_1(s) = k \Theta_m(s)$$

$$p_m(s) \Theta_m(s) = k \Theta_1(s) + C_m(s)$$

dove:

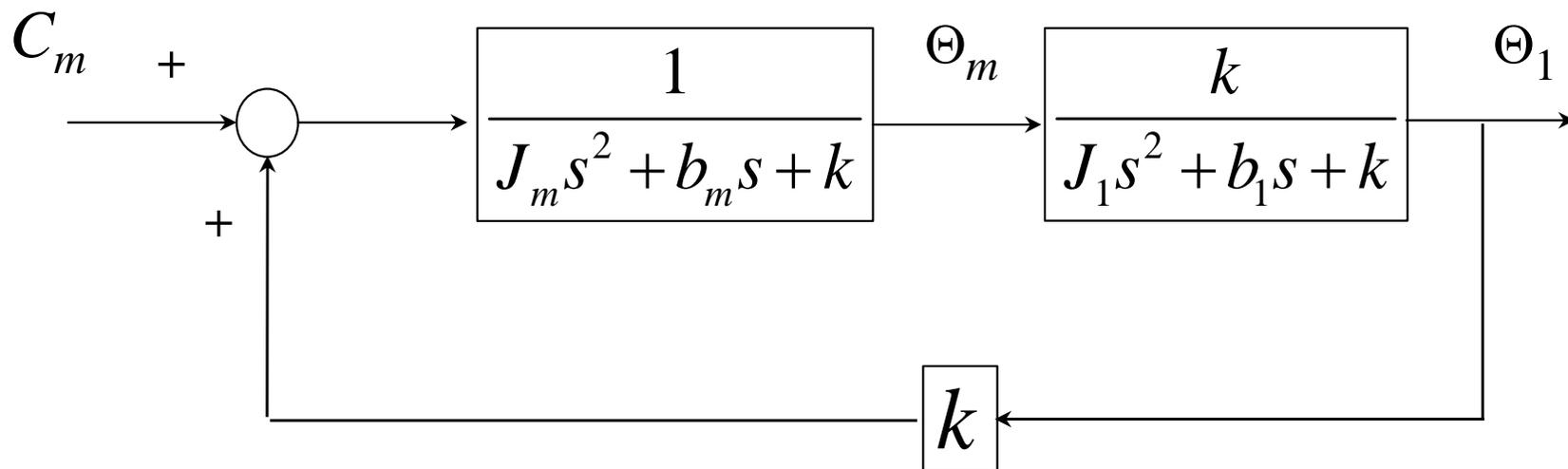
$$p_1(s) = J_1 s^2 + b_1 s + k$$

$$p_m(s) = J_m s^2 + b_m s + k$$

- La funzione di trasferimento a ciclo aperto tra C_m e Θ_1 :

$$\frac{\Theta_1(s)}{C_m(s)} = \frac{k}{\left[(J_m s^2 + b_m s + k)(J_1 s^2 + b_1 s + k) - k^2 \right]}$$

- Il diagramma a blocchi del sistema a ciclo aperto è:



- Il polinomio caratteristico del ciclo aperto è:

$$J_1 J_m s^4 + (J_1 b_m + J_m b_1) s^3 + [k(J_1 + J_m) + b_m b_1] s^2 + k(b_1 + b_m) s$$

- Se i coefficienti di attrito viscoso sono trascurabili si ha:

$$J_1 J_m s^4 + k(J_1 + J_m) s^2$$

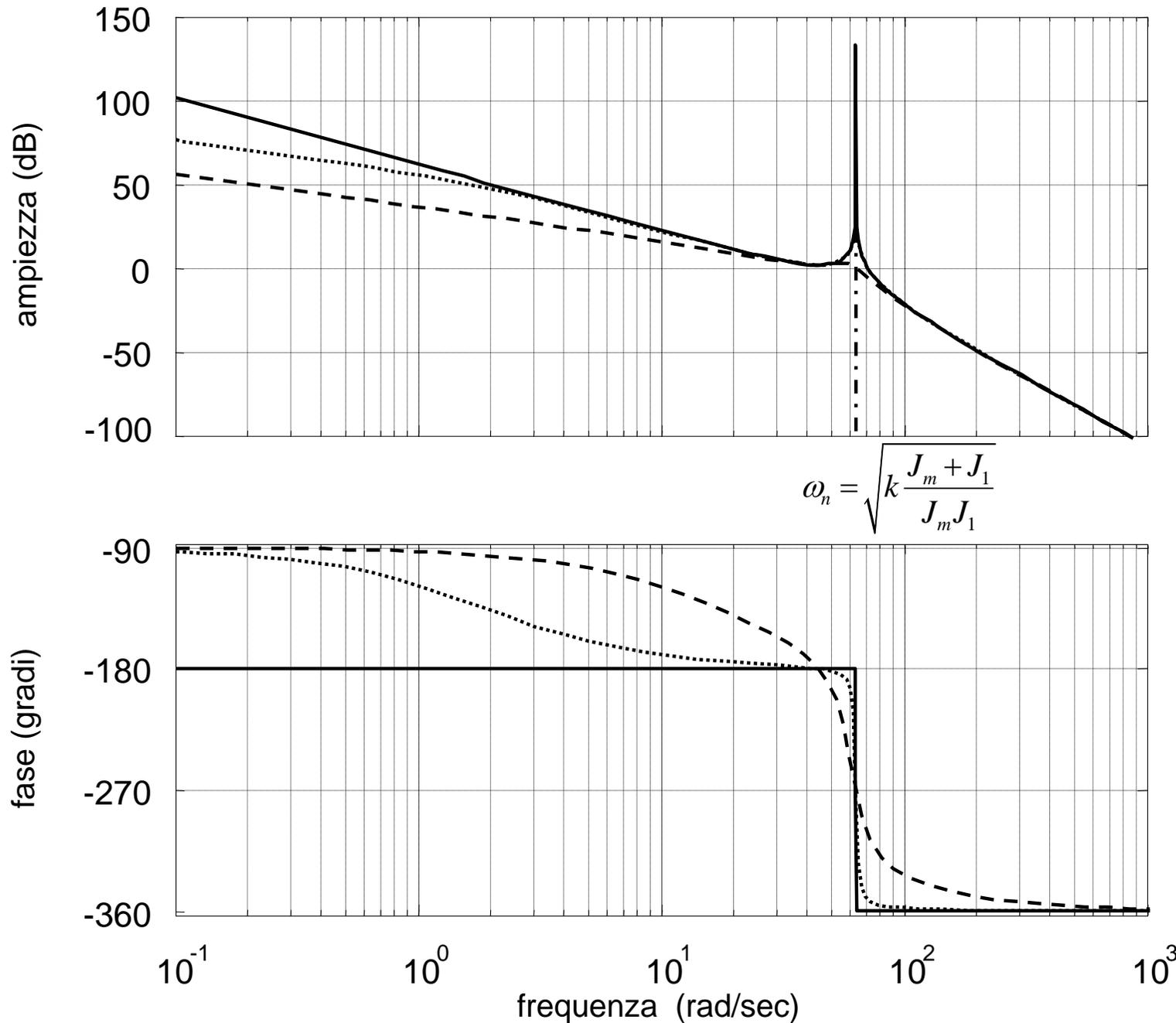
ovvero una coppia di poli nell'origine e una coppia di poli complessi e coniugati:

$$s = \pm j\omega_n \quad \omega_n^2 = k \left(\frac{1}{J_m} + \frac{1}{J_1} \right)$$

- la **coppia di poli nell'origine** rappresenta il **moto rigido**
- la **coppia di poli complessi e coniugati** rappresenta il **moto vibratorio** con **pulsazione di risonanza** ω_n

Funzione di trasferimento $\Theta_1 \setminus C_m$

Diagramma di Bode ramo diretto coppia rotazione del giunto



$k = 0.8 \text{ Nm / rad}$

$J_m = 0.0004 \text{ Nms}^2 / \text{rad}$

$J_1 = 0.0004 \text{ Nms}^2 / \text{rad}$

$b_1 = 0 \text{ Nms / rad}$

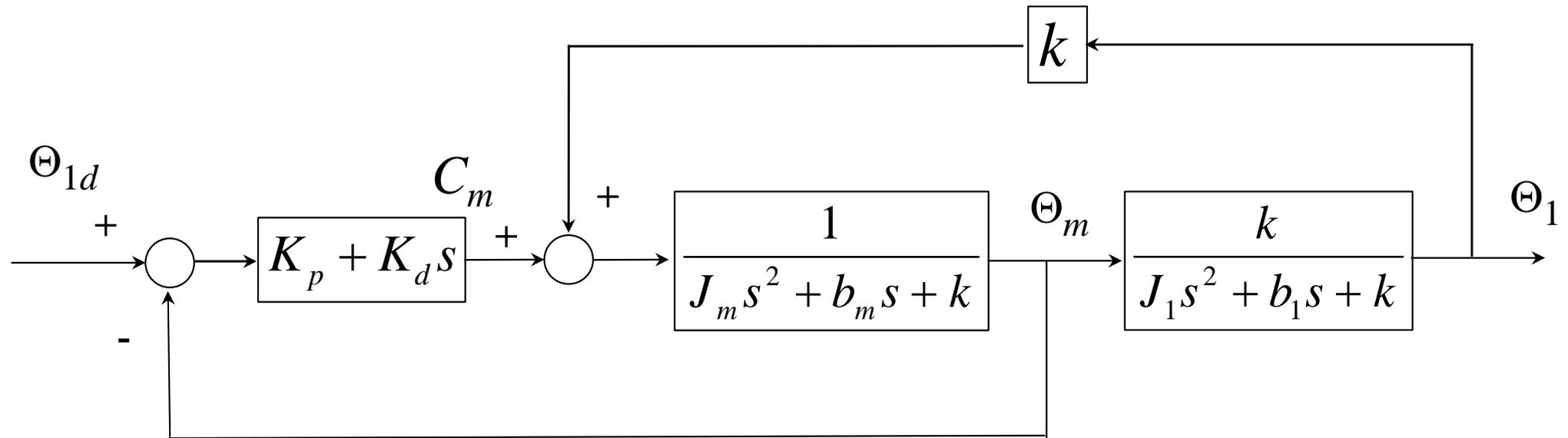
$- b_m = 0 \text{ Nms / rad}$

$\cdots b_m = 0.0015 \text{ Nms / rad}$

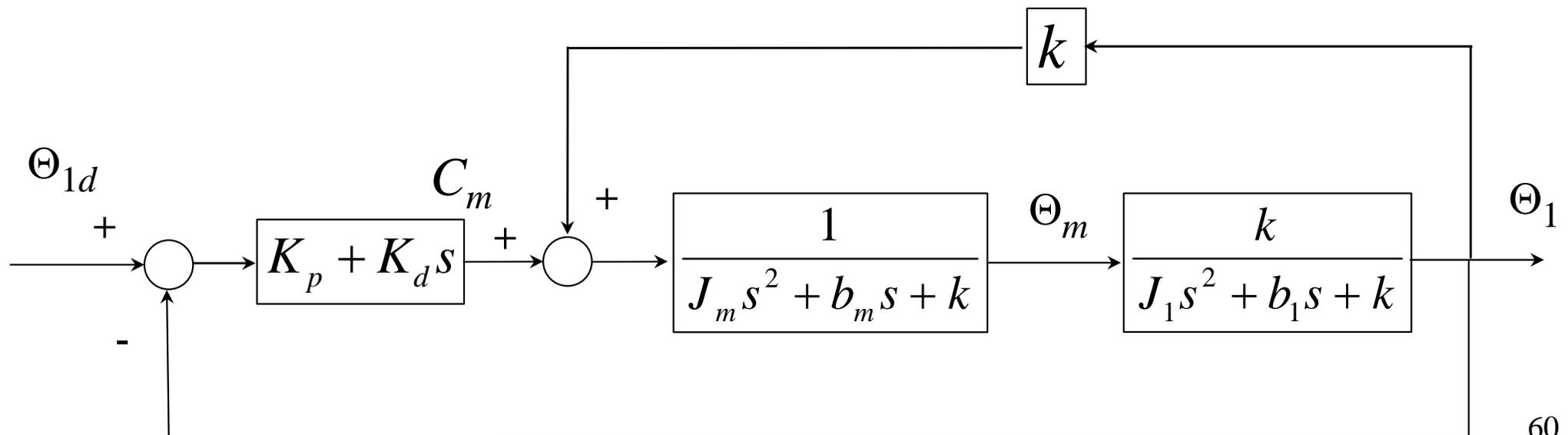
$-- b_m = 0.015 \text{ Nms / rad}$

Controllo di Posizione

- Controllo PD con retroazione della posizione del motore:



- Controllo PD con retroazione della posizione del braccio:



- Se si pone:

$$K_p + K_d s = K_d (s + a)$$

$$\text{con } a = K_p / K_d$$

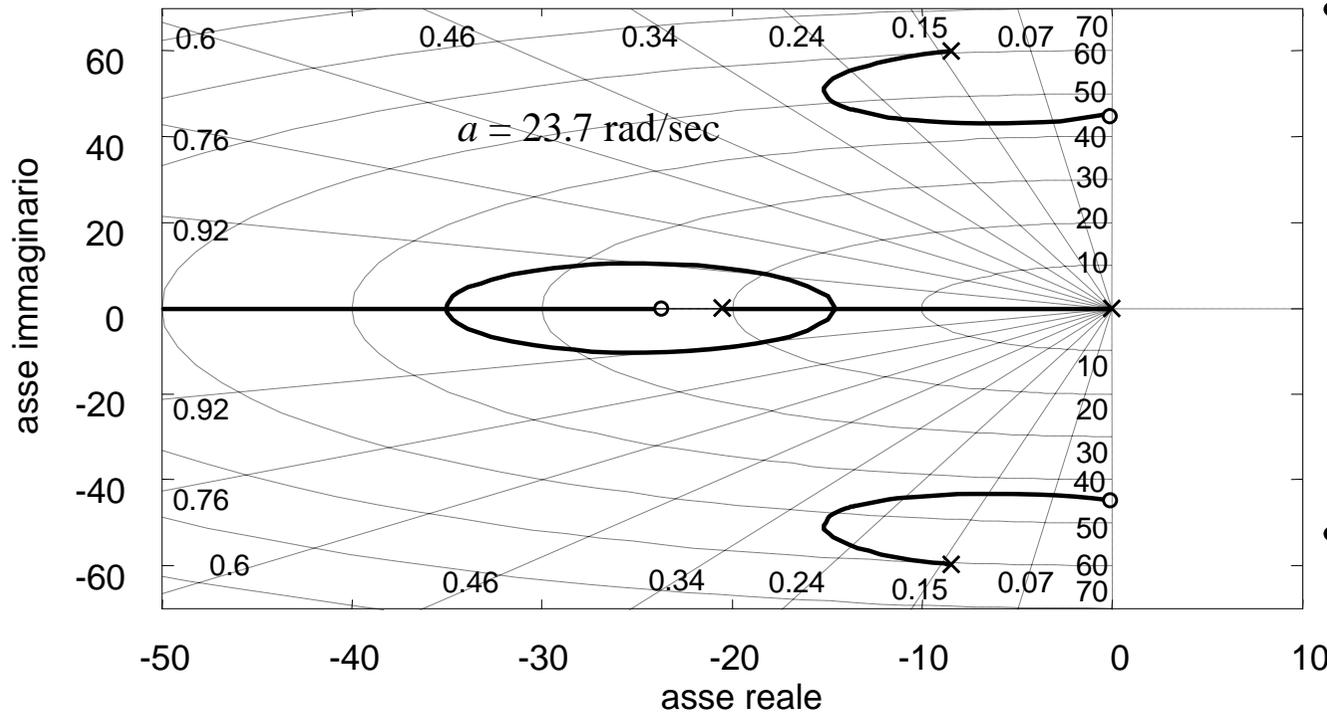
- Il luogo delle radici per il sistema ad anello chiuso con retroazione della posizione del motore in termini di K_d e con a fissato è:

$$p_m p_1 - k^2 + K_d (s + a) p_1 = 0$$

- Il luogo delle radici per il sistema ad anello chiuso con retroazione della posizione del braccio in termini di K_d e con a fissato è:

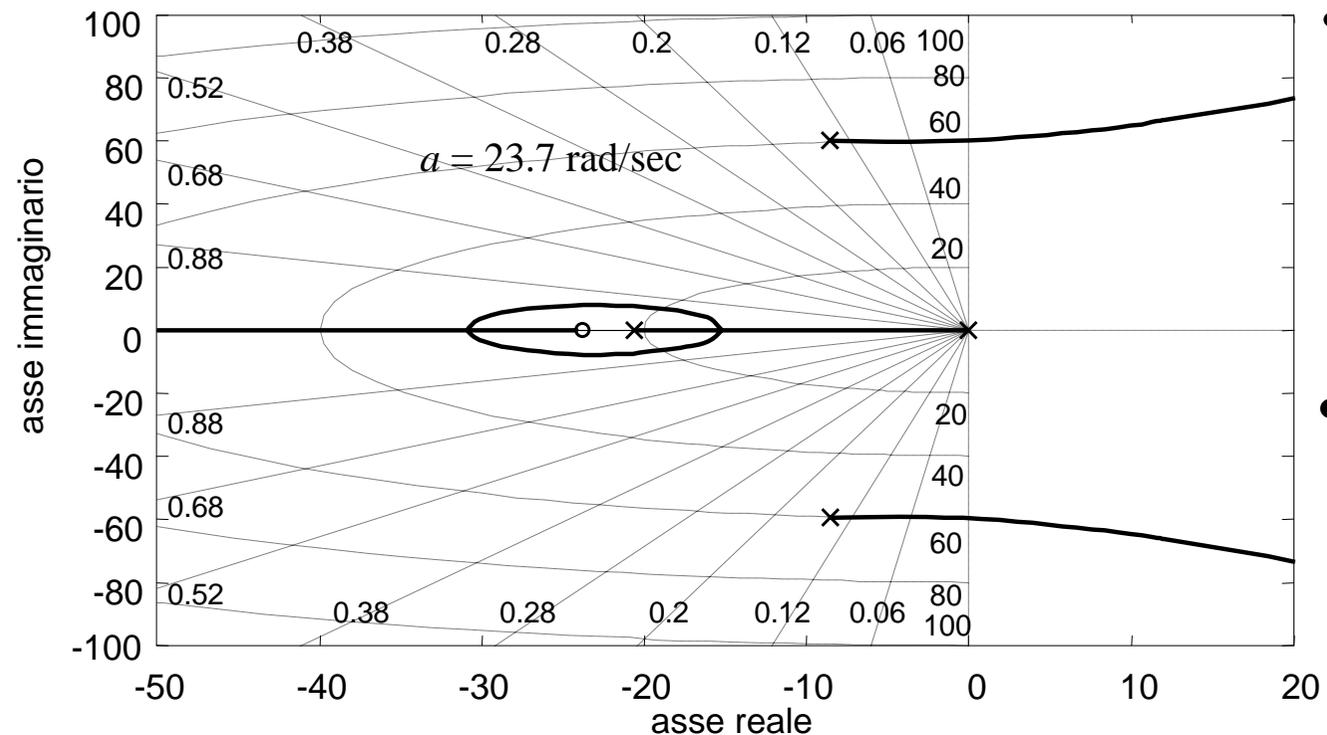
$$p_m p_1 - k^2 + K_d k (s + a) = 0$$

Luogo delle Radici con retroazione della posizione del motore



- Il sistema ad anello chiuso è stabile $\forall K_d > 0$, la presenza di zeri molto vicini all'asse immaginario comporta oscillazioni indesiderate e un tempo di assestamento più lungo
- Dinamica non modellata può rendere il sistema instabile

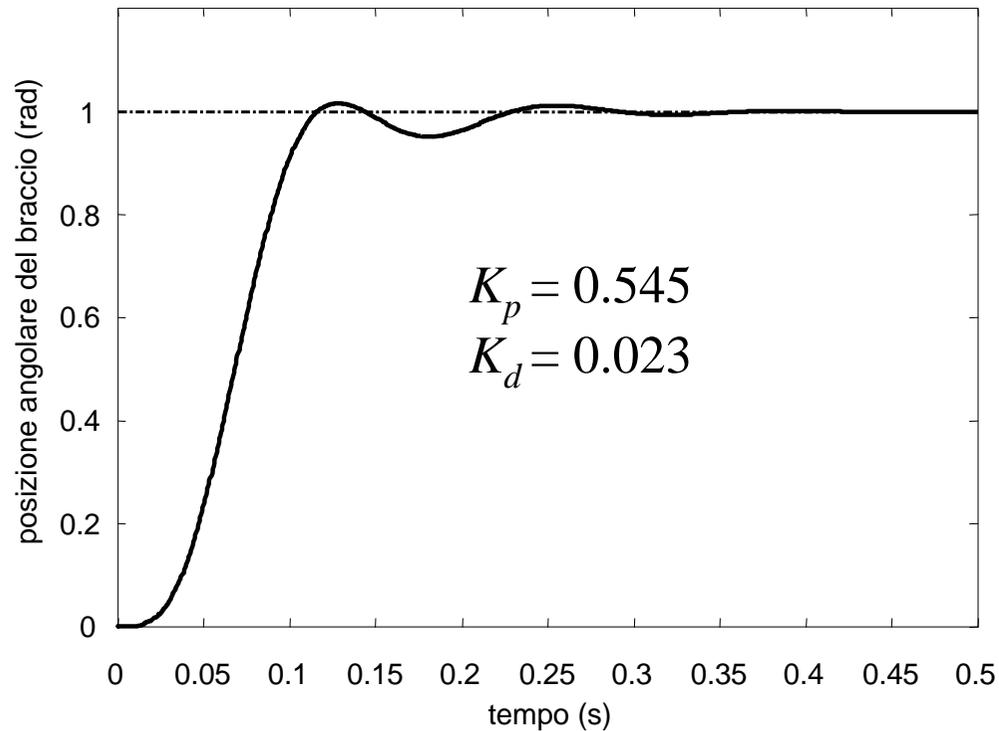
Luogo delle Radici con retroazione della posizione del carico



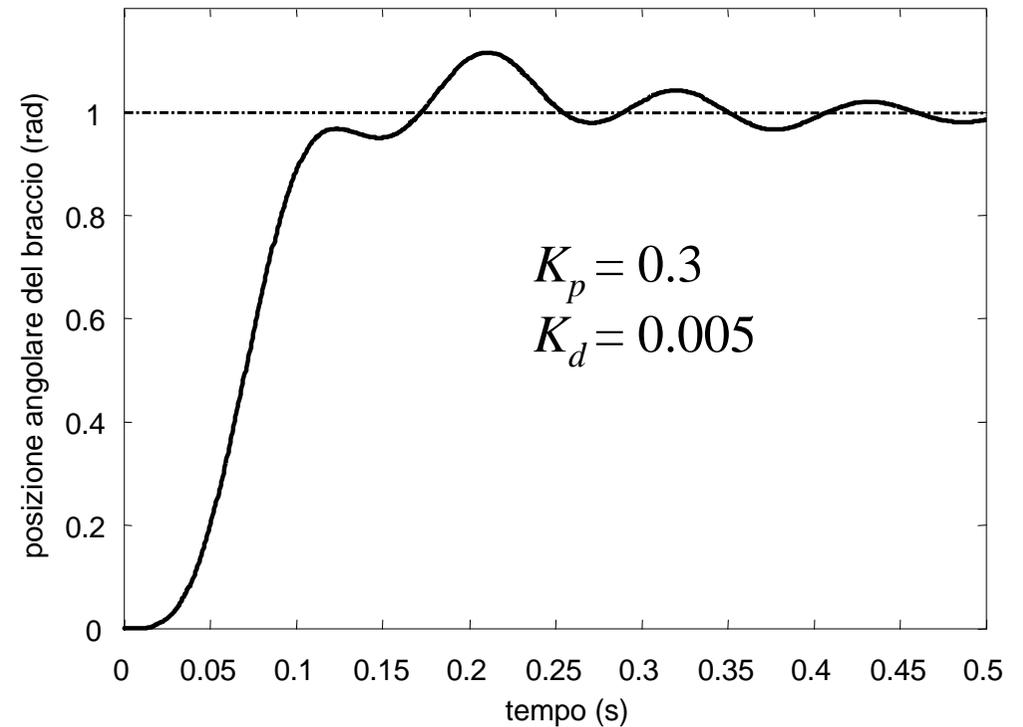
- Il sistema ad anello chiuso è instabile $\forall K_d$ maggiore di un valore critico, che si può calcolare con il criterio di Routh
- K_d deve essere minore del suo valore critico per mantenere un ragionevole margine di stabilità

- Risposta a un gradino unitario

Retroazione dal motore



Retroazione dal braccio



- Un controllore PD è inadeguato per il controllo di un robot a meno che non sia trascurabile la flessibilità del giunto o ci si accontenta di una risposta relativamente lenta del braccio.
- Tuttavia ancora oggi è diffuso nell'industria l'utilizzo di semplici controllori PD e PID

INDICAZIONI PER LA PROGETTAZIONE DI CONTROLLI REALI

Le considerazioni fatte riguardo il **controllo di robot reali con più gradi di mobilità** possono essere così riassunte

- Il **disturbo delle azioni mutue** tra membri, quale fenomeno non lineare, deve essere preso in considerazione
 - introducendo un **blocco di compensazione** capace di linearizzare gli effetti e progettando controllori locali su ciascun giunto in modo tradizionale
 - considerare gli **effetti non lineari** come **disturbi** “grazie” ai riduttori
- Per **evitare sovraelongazioni**, progettare i controllori di ogni asse
 - con $\zeta = 1 \Rightarrow$ per J_e massimo
 - con $\zeta > 1 \Rightarrow$ altrimenti

ciò riduce la banda passante

- Per **ridurre le vibrazioni**, pianificare le traiettorie in modo che il contenuto in frequenza del riferimento sia significativo solo **al di sotto della frequenza fondamentale** del sistema
- Per **controlli digitali**, impiegare **frequenze di campionamento** circa 10 volte **superiori la banda passante**